T H È S E

présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris 6 -

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

mention : ASTROPHYSIQUE

par M. François BOUCHET

Sujet de la thèse : CROISSANCE DES FLUCTUATIONS PRIMORDIALES ET DISTRIBUTION DES GALAXIES

soutenue le 20 Juin 1983 devant la Commission composée de :

M. J.C. LE GUILLOU	Président
M. J.C. ADAM	Examinateur
M. R. PELLAT	"
M. R. SCHAEFFER	"
M. E. SCHATZMAN	"
M. J. SILK	"

UNIV.
LEEDS

T H È S E

présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE
mention : ASTROPHYSIQUE

par M. François BOUCHET

Sujet de la thèse : CROISSANCE DES FLUCTUATIONS PRIMORDIALES ET DISTRIBUTION DES GALAXIES

soutenue le 20 Juin 1983 devant la Commission composée de :

M. J.C. LE GUILLOU	Président
M. J.C. ADAM	Examinateur
M. R. PELLAT	"
M. R. SCHAEFFER	"
M. E. SCHATZMAN	"
M. J. SILK	"

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543523_0032

REMERCIEMENTS

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur J.C. Le Guillou d'avoir accepté d'être président de mon jury de thèse, ainsi qu'aux examinateurs : MM. J.C. Adam, R. Pellat, E. Schatzman, R. Schaeffer, et J. Silk.

Je remercie Jean Lascoux de m'avoir accueilli au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique où j'ai pu profiter, dans une ambiance agréable, de contacts enrichissants avec l'ensemble des membres du laboratoire.

En particulier, je tiens à distinguer Jean-Claude Adam qui m'a fait bénéficier de sa vaste expérience des problèmes numériques et sans qui la simulation présentée dans cette thèse n'aurait pu aboutir.
Une partie ou l'autre de ce travail m'a amené à profiter utilement de l'expérience d'Anne Gourdin - Héron, Alfred Ramani, Patrick Mora et Guy Laval. De plus, Jean-François Luciani a accepté de relire en détail mon manuscrit. Qu'ils en soient tous remerciés.

Camille Amozig a eu la tâche ingrate de dactylographier ce texte. Je l'en remercie vivement, ainsi que Dominique Concha qui s'est chargé du tirage et Françoise Andalo qui a su aplanir avec le sourire les difficultés administratives. Je désire aussi remercier Martine El Darragi qui m'a supporté durant toute la rédaction.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à René Pellat qui m'a proposé le sujet de cette thèse et m'a fait bénéficier de son expérience, de ses conseils et de son soutien. Toujous disponible pour les choses importantes, il a su par ailleurs créer une atmosphère à la fois chaleureuse et stimulante pour m'initier à la recherche. Je lui en suis très sincèrement reconnaissant.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1.

I. REVUE DES TRAVAUX OBSERVATIONNELS ET ANALYTIQUES SUR LA DISTRIBUTION DES GALAXIES :

1) Homogénéité et isotropie de l'univers aux grandes échelles 3.
   a) Tests de comptage
   b) Fonction d'autocorrélation
   c) Rayonnements électromagnétiques

2) Analyse de la distribution des galaxies 7.
   a) Choix d'une description
   b) Quelques définitions
   c) Résultats observationnels

3) Approches théoriques 18.
   a) Modèles sans dynamique
   b) Evolution linéaire des fluctuations
   c) Evolution non-linéaire

II. PRESENTATION DU FORMALISME 26.

1) Description des interactions :
   a) Interactions prises en compte
   b) Limite Newtonienne
   c) Limite non-collisionnelle

2) Coordonnées utilisées 30.
   a) Coordonnées comobiles
   b) Temps conformel
   c) Equation de Poisson quand $\Omega = 1$

3) Etablissement des équations cinétiques - Notations 34.

a) Lien entre les hiérarchies Klimontovich-BBGKY-Vlasov
b) Dérivation des hiérarchies de Klimontovich et de Vlasov
c) Equations exactes - Limite non collisionnelle
d) Moments de vitesse de l'équation de Vlasov

III. APPROCHE ANALYTIQUE

1) Moments de vitesse de la deuxième équation de la hiérarchie de Vlasov 46.

a) Motivation
b) Dérivation des équations
c) Passage en variables lagrangiennes

2) Hypothèses de fermeture des équations 55.

a) Décomposition des corrélations spatiales à 3 points
b) Loi de conservation des triplets
c) Décomposition du moment de vitesse à 3 points.
d) Valeur du flux de chaleur

3) Résolution des équations 61.

a) Evaluation des termes non locaux
b) Résolution asymptotique
c) Ecart au comportement asymptotique
d) Conclusions

IV. APPROCHE NUMERIQUE

1) Définition du modèle et organisation générale du "code" 73.

a) Rappel du modèle à simuler
b) Modèle numérique
c) Présentation du code

2) Réalisation d'un code PIC 82.

a) Intégration spatiale des équations
b) Intégration temporelle des équations
c) Structure "annexes"

3) Programme d'analyse des résultats 103.

a) Introduction

b) Principe et problèmes de l'analyse de Fourier des corrélations.

c) Structure du programme.

4) Conditions initiales et résultats 107.

a) Génération des conditions initiales

b) Premiers résultats et conclusion

ANNEXES

A.I : DERIVATION DE LA HIERARCHIE BBGKY A.1

A.II. TENSEURS DE TEMPERATURE ET DE FLUX DE CHALEUR DANS LE CAS D'UN UNIVERS HOMOGENE ET ISOTROPE A.4

A.III. DERIVEE DU MOMENT D'ORDRE 3 DE S_{12} A.7

A.IV. EQUATION DE CONSERVATION DES "DOUBLES-PAIRES" A.9

A.V GESTION DES SUPPORTS - MEMOIRE A.11

A.VI STRUCTURE DU PROGRAMME ET DESCRIPTION DES DIAGNOSTICS A.13

A.VII. THEOREME D'ENERGIE COSMIQUE A.22

REFERENCES

INTRODUCTION

Au cours de ce siècle, la distribution de la matière dans l'Univers a été un sujet d'intérêt constant et renouvelé. Dans la décade 1910-1920, les test de comptage (I.1a) permirent d'établir que les étoiles qui nous entourent forment un système aplati d'extension finie. Mais dès 1926, Hubble montra, toujours grâce aux tests de comptage, que la distribution des galaxies (les autres "Univers-Iles") paraissait uniformes à grande échelle et ne semblait pas présenter de "bord". Etant donné l'importance des implications d'un tel résultat, une énorme quantité de travail observationnel fut par la suite dévolue à l'étude de l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers à grande échelle.

Cependant très vite les astronomes s'intéressèrent aussi aux fluctuations de la distribution aux échelles plus petites et cherchèrent à les caractériser au moyen de mesures statistiques variées. Presque toutes les mesures utilisées dérivaient plus ou moins directement de la fonction de corrélation à deux points ξ , qui fut finalement elle-même évaluée par Limber (1953-1954) grâce au catalogue Lick.

Prenant la suite du programme d'analyse de Neyman et Scott (i.e. Neyman et al., 1954, Neyman, 1962, Scott, 1962) P.J.E. Peebles et ses collègues de Princeton consacrèrent un travail considérable à l'étude statistique systématique des catalogues de Galaxies. Utilisant les techniques de fonctions de corrélation transposées dans un contexte astrophysique, ils montrèrent que ces fonctions présentent des caractéristiques remarquables (Universalité, absence d'échelle caractéristique sur un large domaine....I-2). Leurs premiers résultats ont depuis été considérablement raffinés grâce à l'utilisation réitérée de la technique d'analyse. Ces résultats ont d'ailleurs à leur tour suscités la constitution d'échantillons statistiques conçus dès l'origine pour répondre à certaines questions

en suspens. De plus l'apparition de catalogues comportant les décalages vers le rouge des galaxies, et l'utilisation éventuelle du Télescope spatial laisse présager l'apparition prochaine de résultats nouveaux et importants.

L'ensemble des données accumulées a suscité par ailleurs un grand nombre de travaux théoriques (I.3) visant à expliquer cette situation en la reliant éventuellement à des fluctuations "primordiales" de faible amplitude au moment de la recombinaison. Cependant après une période de croissance linéaire maintenant clairement décrite suite à de nombreux travaux, ces fluctuations entrent dans un régime non-linéaire où les méthodes traditionnelles ne peuvent plus être appliquées (linéarisation, développement de faible couplage...). Cette difficulté de principe a poussé plusieurs groupes à faire des simulations numériques de systèmes à N-corps en attraction gravitationnelle.

Pourtant, en 1977 Davis et Peebles ont proposé une description statistique incluant la phase non linéaire. Le formalisme qu'ils ont utilisé est celui de la hiérarchie BBGKY, complété par un certain nombre d'hypothèses de description des interactions et de "coupure" de la hiérarchie, pour arriver à un système d'équations fermé reliant entre eux les moments de vitesse de la fonction de corrélation à deux points. C'est cette approche que nous avons dans un premier temps reprise et améliorée avant de nous tourner vers les simulations.Celles-ci permettent d'une part de tester certaines hypothèses de la théorie, et d'autre part d'avoir accès à des quantités théoriquement importantes que les observations ne peuvent complètement déterminer (i.e. les corrélations distance-vitesse).

L'exposé qui suit est divisé en quatre parties. Le premier chapitre passe en revue les principaux résultats observationnels et analytiques en relation avec ce travail. Le second chapitre présente le formalisme utilisé dans toute la thèse : après avoir introduit les hypothèses de description des interactions et le système de coordonnées choisies nous écrivons les équations cinétiques qui en découlent. Le chapitre III est consacré à l'approche analytique du problème, c'est-à-dire à la simplification des équations et à leur résolution. Enfin le chapitre IV décrit la réalisation des simulations numériques, de la définition du modèle aux premiers résultats.

C H A P I T R E I

REVUE DES TRAVAUX OBSERVATIONNELS ET ANALYTIQUES SUR LA DISTRIBUTION DES GALAXIES

C H A P I T R E I

REVUE DES TRAVAUX OBSERVATIONNELS ET ANALYTIQUES SUR LA DISTRIBUTION DES GALAXIES

1) Homogénéité et isotropie de l'univers aux grandes échelles

Bien qu'ayant donné lieu à de vives controverses dans le passé, l'hypothèse d'homogéneité et d'isotropie (aux grandes échelles) de l'Univers est aujourd'hui largement acceptée. On trouvera ci-dessous un rappel des tests de cette hypothèse.

a) Tests de comptage :

Jusque vers 1965, la seule indication observationnelle était due au comptage des galaxies. Si celles-ci sont distribuées de manière homogène et isotrope, leur nombre doit varier en fonction de leur magnitude apparente comme $10^{0,6m}$. En effet, les galaxies de luminosité L, à une distance r, ont une luminosité apparente $f = L/4\pi r^2$, et leur nombre doit alors varier comme : $N(>f) = \frac{4}{3}\pi r^3 n \propto f^{-3/2}$. La sommation de cette relation sur les différentes luminosités intrinsèques L change le coefficient de normalisation, mais la dépendance fonctionnelle en f est évidemment identique. Exprimant la luminosité sur l'échelle logarithmique des magnitudes (définie par $m = -2.5 \log f$ + constante) on trouve bien : $N(<m) \propto 10^{0.6m}$. Les comptages modernes présentent une dépendance proportionnelle à $10^{0,45m}$ seulement et semblent de plus présenter des fluctuations à très grande échelle (gradients de densité). Cependant le décalage vers le rouge dû à l'expansion tend à placer les galaxies les moins lumineuses hors du domaine de sensibilité des plaques photographiques (centré sur le bleu). Les estimations de l'ampleur de cet effet conduisent à des corrections

Figure I

Carte des galaxies du catalogue Lick ($b^{II} > 40°$).
L'échelle des gris (de 1 à 8) de chaque élément de résolution correspond au comptage des galaxies dans les cellules 10'× 10' de Shane - Wirtanen.

(dites "K") compatibles avec une loi en $10^{0,6m}$. De plus les variations d'absorption locales sont difficiles à démêler d'avec de véritables gradients de densité à grande échelle. Ces comptages sont donc compatibles avec l'hypothèse, sans pour autant en être de fermes supports. Ils ont cependant joué un grand rôle historiquement en permettant de montrer que l'extension des galaxies, contrairement à celles des étoiles de la voie lactée, ne semble pas présenter de limite.

b) fonction d'autocorrélation :

Les études précédentes conduisirent à la création de grands catalogues de galaxies (Zwicky, Lick...). Un simple coup d'oeil (voir fig. 1) aux distributions angulaires qui en résultent montre la tendance qu'ont ces objets à se grouper en amas, voir en super-amas. Une façon d'évaluer ces irrégularités consiste à calculer la fonction d'autocorrélation $\xi(r)$ qu'on peut définir par la valeur moyenne (sur r_o) du produit des contrastes de densité ($\frac{\delta\rho}{\rho}(r_o) = \frac{\rho(r_o) - \langle\rho\rangle}{\langle\rho\rangle}$) en deux points éloignés de r : $\xi(r) = \left\langle \frac{\delta\rho}{\rho}(r_o) \frac{\delta\rho}{\rho}(r_o + r) \right\rangle_{r_o}$. Nous y reviendrons longuement par la suite. Remarquons simplement pour le moment que $\xi(5h^{-1}\text{Mpc}) \sim 1$ et $\xi(50h^{-1}\text{Mpc}) \lesssim 0.025$, avec la constante de Hubble prise égale à $H = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, (observationellement $1/2 \lesssim h \lesssim 1$). Ceci indique donc qu'à l'échelle de quelques dizaines de MegaParsecs les corrélations entre *galaxies* deviennent négligeables (Peebles et Hauser 1974). Cependant la même étude, mais partant sur les corrélations entre *centres des Amas riches* d'Abell, montre que $\xi_{aa}(r)$ est cette fois de l'ordre de l'unité pour une distance comprise entre 30 et $100h^{-1}$ Mpc (Kiang et Saslaw, 1969, Hauser et Peeble, 1973). Ce qui montre qu'on ne peut considérer l'Univers comme homogène (c'est à dire ne présentant que de petites fluctuations de densité telles que $\frac{\delta\rho}{\rho} < 1$) qu'aux échelles au moins supérieures à la centaine de Megaparsecs. Il est d'ailleurs possible de concevoir une hiérarchie continue d'objets de plus en plus vastes (Mandelbrot, 1975, 1977) mais les modèles les plus simples conduisent à des gradients de densité trop forts à l'échelle de $30h^{-1}$ Mpc. Tel quels, ces résultats sont encore une fois compatibles avec l'hypothèse d'homogéneité et d'isotropie (en moyennant sur un volume suffisant) mais ils n'ont pas vraiment de caractère contraignant aux échelles plus grandes. Par contre, nous verrons plus loin

(I-2c) que l'homogénéité et l'isotropie impliquent une loi d'échelle sur ξ en fonction de la profondeur des catalogues étudiés. Cette loi est très bien vérifiée, ce qui présente cette fois une preuve convaincante de l'hypothèse.

c) Rayonnements Electromagnétiques

La découverte d'un rayonnement isotrope à 2,7° K par Penzias et Wilson en 1965 apporta un support solide et direct à l'hypothèse. Les mesures d'anisotropie à grande échelle de ce rayonnement atteignent aujourd'hui une sensibilité de $\Delta T/T \sim 10^{-4}$. Elles permettent de montrer que l'anisotropie quadripolaire éventuelle du rayonnement ne peut être qu'extrêmement faible (la partie dipolaire ne pouvant être séparée du déplacement du référentiel d'observation par rapport à celui du rayonnement. Les résultats les plus récents (Lubin et Al. 1983) correspondent à un effet dipolaire d'environ 3mk et sont d'une telle sensibilité qu'ils détectent le mouvement de la terre sur son orbite solaire! Ils établissent d'autre part une limite supérieure de 0,19 mk (au niveau de 90% de confiance) pour un effet quadripolaire éventuel. Ces nouveaux résultats, extrêmement précis, mettent en doute certains résultats précédents (Wilkinson 1982, Ceccarelli et Al. 1982). De plus leur analyse de covariance donne $\langle \Delta T_1 \Delta T_2 \rangle < 0.01 (mK)^2$ pour des séparations angulaires comprises entre 10 et 180 degrés. L'absence de quadrupole au niveau de 0,1 mK est d'ailleurs confirmée par Fixens et Al. (1983) à une fréquence différente. Enfin l'ensemble des mesures à différentes fréquences mettent bien en évidence un spectre globalement de type corps noir à 2,7° K dans un large domaine.

Le développement de la radioastronomie a permis la compilation de catalogues de radiosources extragalactiques dont un grand nombre sont proches de l'horizon $cH^{-1} \sim 3000h^{-1}$ Mpc. La distribution des plus brillantes (4C) est pratiquement poissonienne ce qui est un test puissant de l'isotropie à cette échelle (i.e. Webster 1976, Seldner et al. 1978).

Plus récemment encore l'émergence de l'Astronomie - X a permis la mesure du fond X qui est partiellement dû à des objets discrets proches. A l'échelle de $\theta \sim 5°$, les fluctuations relatives sont inférieures à 0,04 (i.e. Schwartz et al. 1976), ce qui contraint d'autant les fluctuations de la densité augulaire de matière.

Ces trois domaines d'étude du spectre électromagnetique montrent clairement l'isotropie à grande échelle de l'univers par rapport à nous. Or il est naturel de faire l'hypothèse Copernicienne (sans laquelle aucune cosmologie n'est possible) qui suppose que nous n'occupons pas une position particulière dans l'Univers, c'est à dire que le voisinage de la terre est représentatif de l'Univers dans son ensemble. Dans ce cas, l'Univers doit aussi paraître isotrope à un observateur éloigné de nous, ce qui permet d'en déduire son homogéneité.

2) Analyse de la distribution des galaxies

a) Choix d'une description

Comme indiqué précédemment la distribution de la matière aux échelles inférieures à $100h^{-1}$ Mpc est loin d'être homogène. Ainsi l'inspection visuelle de la figure 1 nous a montré une tendance prononcée à la formation d'Amas qui semblent reliés par des filaments entourant des zones de densité plus faible. De nombreux critères ont été utilisés pour caractériser cette distribution de manière plus quantitative, dont un grand nombre dérivent de la fonction de corrélation déjà introduite. Cette analyse en fonctions de corrélation, que nous allons plus amplement détailler par la suite, n'est certainement pas la seule possible. La distribution des distances au plus proche voisin, ou bien celle des fréquences du nombre de voisins dans un angle solide donné ont aussi été utilisées et décrivent des aspects de la distribution que les fonctions de corrélation d'ordre le plus bas distinguent mal. Ainsi ces fonctions d'autocorrélation ne sont pas sensibles, dans le domaine où elles sont bien connues observationnellement (c'est-à-dire à $\xi > 1$, $r < 5h^{-1}$Mpc) à des structures filamentaires à grande échelle comme celles résultant de la théorie des "Pancakes" (Zeldovich 1970, Doroshkevich et al. 1978...) bien qu'on puisse en tirer certaines informations (Schaeffer et Silk 1983). Elles ont cependant l'avantage de pouvoir, d'une part être extraite relativement directement des observations (I,2,b-c),et d'autre part être utilisées dans le traitement de la dynamique des galaxies (II,3), à condition toutefois que la distribution des galaxies et celle de la masse ait le même comportement.

b) Quelques définitions .

Nous allons définir diverses fonctions de corrélation décrivant la distribution d'objets indiscernables (des étoiles, des galaxies, des amas ...) dont les positions sont connues, en supposant que cette distribution est une réalisation d'un processus aléatoire isotrope. Nous traduirons ensuite ces définitions dans le cas où la distribution est projetée sur une sphère entourant l'origine, c'est-à-dire que les distances des objets à l'origine sont inconnues. Enfin nous verrons qu'il est possible dans certains cas de relier simplement les fonctions angulaires et spatiales.

i) fonctions de corrélation spatiales

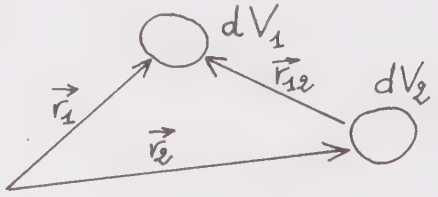
- Appelons dP la probabilité de trouver un objet dans un volume infinitésimal dV; on a :
$dP = \bar{n} dV$, où $\bar{n}$ est la densité moyenne (indépendante de la position). A strictement parler, $\bar{n}$ doit être calculée par la moyenne $\bar{n} = \frac{\langle N \rangle}{V}$ sur un ensemble de différentes réalisations du processus aléatoire étudié. Mais nous ne disposons que d'un Univers. Cependant on peut considérer les distributions en des régions très éloignées (non causalement connectées par exemple) comme des réalisations indépendantes du même processus physique . C'est-à-dire qu'on considère la moyenne prise sur des catalogues différents, ou sur différentes régions d'un même grand catalogue. Enfin cette probabilité est normé à N, le nombre d'objet, car il s'agit de la probabilité de trouver un objet quelconque (c'est la somme de la probabilité de trouver 1'objet 1 dans dV, et de celle de trouver 1'objet 2 dans dV et ainsi de suite jusqu'à N).

- Si maintenant la probabilité de trouver un deuxième objet dans dV_2 est indépendante de la probabilité d'en trouver un dans dV_1, la probabilité de trouver 1'un dans dV_1 et 1'autre dand dV_2 vaut simplement le produit des probabilités

$$dP = \bar{n}^2 dV_1 dV_2$$

Dans le cas où ces probabilités sont corrélées on écrit alors :

$$dP = \bar{n}^2 \left(1 + \xi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right) dV_1 dV_2$$



et d'après l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie la fonction de corrélation à deux points ξ, ou fonction de distribution réduite (c'est-à-dire dont on a enlevé la partie non corrélée)ne dépend que du module de la distance r_{12} entre ces éléments dV_1 dV_2 :

$$\xi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \xi(r_{12}) \equiv \xi_{12}$$

- Pour analyser les corrélations à 3 points on décompose là encore la probabilité totale. En effet si la probabilité de trouver un troisième objet dans dV_3 est indépendante de la probabilité d'en trouver un dans dV_1 et un autre dans dV_2 on a $dP = \bar{n}^3(1 + \xi_{12})dV_1\, dV_2\, dV_3$. Ceci permet de définir (en tenant compte de l'indiscernabilité) la fonction de distribution réduite ζ_{123} par

$$dP = \bar{n}^3(1 + \xi_{12} + \xi_{23} + \xi_{31} + \zeta_{123})\, dV_1\, dV_2\, dV_3$$

où ζ_{123} ne dépend que de 3 longueurs ou de 2 longueurs et un angle, toujours d'après l'hypothèse d'homogéneité et d'isotropie.
Enfin les définitions aux ordres suivants sont obtenues par simple généralisation des définitions précédentes (la fonction réduite à l'ordre 4 étant notée dans la suite par η_{1234}).

ii) fonctions de corrélation angulaires

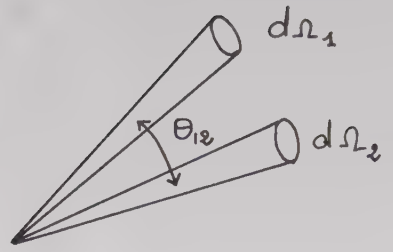
Les grands catalogues (Zwicky, Shane-Wirtanen) sont des compilations de positions angulaires de galaxies (ou d'amas). On définit alors des fonctions de corrélation angulaires en parfaite analogie avec les fonctions de corrélation spatiales.

- Soit σ l'analogue de $\bar{n}$, c'est-à-dire la densité de surface ou angulaire moyenne (définie par $\sigma = \frac{\langle N \rangle}{\Omega}$. La probabilité de trouver un objet dans un angle solide $d\Omega$ s'écrit :

$$dP = \sigma\, d\Omega$$

- la probabilité de trouver un objet dans l'angle solide $d\Omega_1$ et un autre dans l'angle solide $d\Omega_2$ a pour expression

$$dP = \sigma^2 (1 + w_{12})\, d\Omega_1 d\Omega_2$$



avec $w_{12} \equiv w(\theta_{12})$, $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$. La décomposition en partie corrélée et partie indépendante peut dans ce cas s'interpréter simplement, le premier terme en σ^2 décrivant les paires de galaxies qui sont éloignées mais qui paraissent proches en projection, le second les paires "véritables".

- la probabilité de trouver un objet dans les angles solides $d\Omega_1$, $d\Omega_2$ et $d\Omega_3$ se décompose suivant :

$$dP = \sigma^3 (1 + w_{12} + w_{23} + w_{31} + z_{123})\, d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3$$

Cette fois le terme en σ^3 représente le cas où 3 galaxies sont accidentellement vue proches en projection, tandis que les termes comprenant w représentent celui où une paire est vue proche en projection d'un objet plus éloigné , z_{123} décrivant les triplets.

- là aussi, les définitions se généralisent facilement à l'ordre supérieur et on a par exemple :

$$\begin{aligned} dP = \sigma^4 (1 &+ w_{12} + w_{13} + w_{14} + w_{23} + w_{24} + w_{34} \\ &+ w_{12} w_{34} + w_{13} w_{24} + w_{14} w_{23} \\ &+ z_{123} + z_{124} + z_{134} + z_{234} + u_{1234})\, d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3 d\Omega_4 \end{aligned}$$

iii) lien entre les deux types de fonctions

Avant d'examiner dans le paragraphe suivant les résultats observationnels, nous allons établir comment w varie avec la profondeur du catalogue ainsi que sa relation avec ξ .

- la densité angulaire σ correspond simplement à l'intégration sur la profondeur D* du catalogue et le long de la ligne de visée de la densité

moyenne. Les catalogues étant en général complet jusqu'à une certaine magnitude apparente m, on estime cette profondeur par la relation $m = M + 5\log D^* + 25$ où M est la magnitude absolue moyenne des objets et D* est en Megaparsecs , d'où

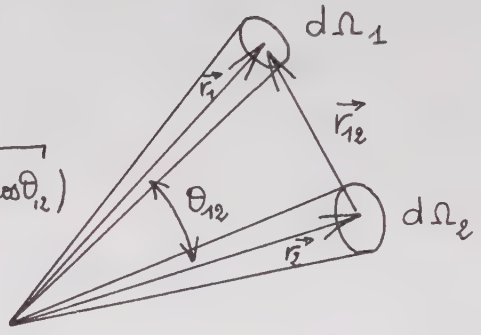
$$dP = \sigma d\Omega = \int_0^{D^*} \bar{n}\, r^2 dr d\Omega \Rightarrow \qquad \sigma = \frac{D^* \bar{n}}{3}$$

- Dans l'hypothèse d'un processus effectivement aléatoire et isotrope, on obtient $w(\theta)$ par simple intégration le long des deux lignes de visées

$$dP = \sigma^2 (1 + w(\theta))\, d\Omega_1 d\Omega_2 = \bar{n}^2 \int_0^{D^*} r_1^2 dr_1 \int_0^{D^*} r_2^2 dr_2 \left(1 + \xi(r_{12})\right) d\Omega_1 d\Omega_2$$

D'où l'on tire :

$$w(\theta) = 9 D^{*-6} \int_0^{D^*} dr_1 \int_0^{D^*} dr_2\, r_1^2 r_2^2\, \xi\left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta_{12}}\right)$$



La contribution essentielle à l'intégrale est à θ_{12} et r_{12} petit. On étend donc l'intégration jusqu'à l'infini, et on approxime le cosinus par $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, ce qui permet d'écrire $\left(4 r_1 r_2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2\right)$

$4 r_1 r_2 \simeq (r_1 + r_2)^2$. D'où

$$w(\theta) = 9 D^{*-6} \int_0^{\infty} dr_1 \int_0^{\infty} dr_2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^4 \xi\left(\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 \theta^2}\right)$$

Posant $u = \frac{r_1 + r_2}{2D^*}$, $v = r_1 - r_2$, on obtient finalement :

$$w(\theta) = D^{*-1} F(D^* \theta) \quad , \quad F(x) = 9 \int_0^{\infty} u^4 du \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, \xi\left(\sqrt{v^2 + (ux)^2}\right) \qquad (1)$$

(Limber 1954)

Cette loi d'échelle, reposant explicitement sur l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'univers, permet donc de tester l'hypothèse en comparant les mesures de catalogues de magnitude limite différente. Elle peut d'ailleurs être légérement raffinée(*).

Il est possible, à l'aide de transformations de Mellin (Fall et Tremaine 1977, Parry 1977), d'inverser cette équation. Remarquons simplement que si $\xi(r) \propto r^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, on a alors $w(\theta) \propto \theta^{1-\gamma}$, les coefficients numériques de proportionalité ayant été obtenus par Totsuji et Kihura en 1969.

Pour les fonctions de corrélations d'ordre supérieur et sous les mêmes hypothèses, on obtient facilement des relations d'échelle tout à fait similaires à (1). Finalement, les relations à 1'ordre 3 (Groth et Peebles 1975), et à 1'ordre 4 (Fry et Peebles 1978) peuvent, elles aussi, être inversées complètement si 1'on suppose des dépendances fonctionnelle plausibles pour les fonctions de corrélations spatiales ξ_{123} et η_{1234}.

c) Résultats observationnels :

La loi d'échelle mise en évidence précédemment peut aussi s'écrire sous la forme :

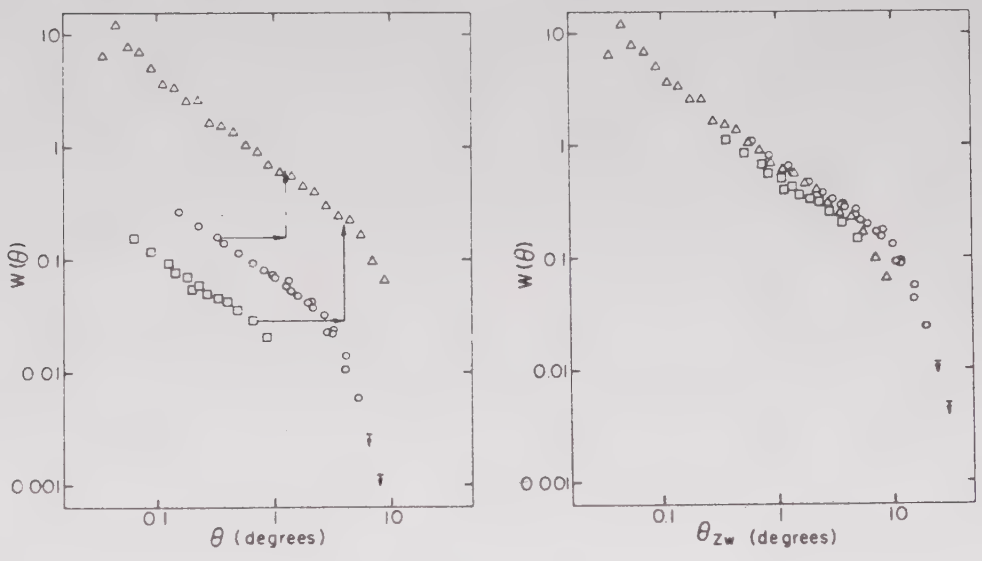
$$w_2(\theta) = (D_1^* / D_2^*)\, w_1(D_2^* \theta / D_1^*)$$

ce qui traduit la diminution de l'amplitude des corrélations angulaires proportionnellement à la profondeur du catalogue (qui est dûe au recouvrement de plus en plus important des amas le long de la ligne de visée), conjuguée à la diminution de l'échelle apparente (angulaire) d'une structure donnée en fonction de son éloignement. Cette relation a entre autre

---

* En réalité, les galaxies présentent une distribution de luminosité. Ceci est pris en compte, ainsi que les erreurs observationnelles de sélection en modifiant légèrement F(X), moyennant l'hypothèse d'indépendance statistique entre position et luminosité (Voir, par exemple, Peebles 1980, eq. 51.7). Enfin il est aussi possible de prendre en compte les corrections de courbure et de décalage vers le rouge (i.e. Phillips et Al. 1978).

été testée par Groth et Peebles (1977) en ramenant le $w(\theta)$ extrait des catalogues Jagellonien (m*=20,3, 1200 galaxies environ) et de Lick (m*=18,6, ~ 590 000 galaxies) à la profondeur du catalogue de Zwicky (m*=14,9, ~3700 galaxies). L'accord obtenu (voir figure II) apporte un ferme soutien à l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie et montre que les corrélations observées ne sont pas dominées par un "accident" statistique (amas très riche) ou dûes à des effets d'oscuration variable.



(a) (b)

Figure II

a) $w(\theta)$ pour les catalogues de Zwicky (triangles), Lick (cercles) et Jagellonien (carrés).
b) $w(\theta)$ ramenés à la profondeur de Zwicky (extrait de Groth 1980).

La forme du $w(\theta)$ observée est bien décrite par une loi de puissance d'exposant -0.77 entre θ_{Zwicky}=0.01° et 10°. En inversant la relation entre w et ξ, on aboutit alors au résultat remarquable :

$$\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma} \quad , \quad \gamma = 1,77$$

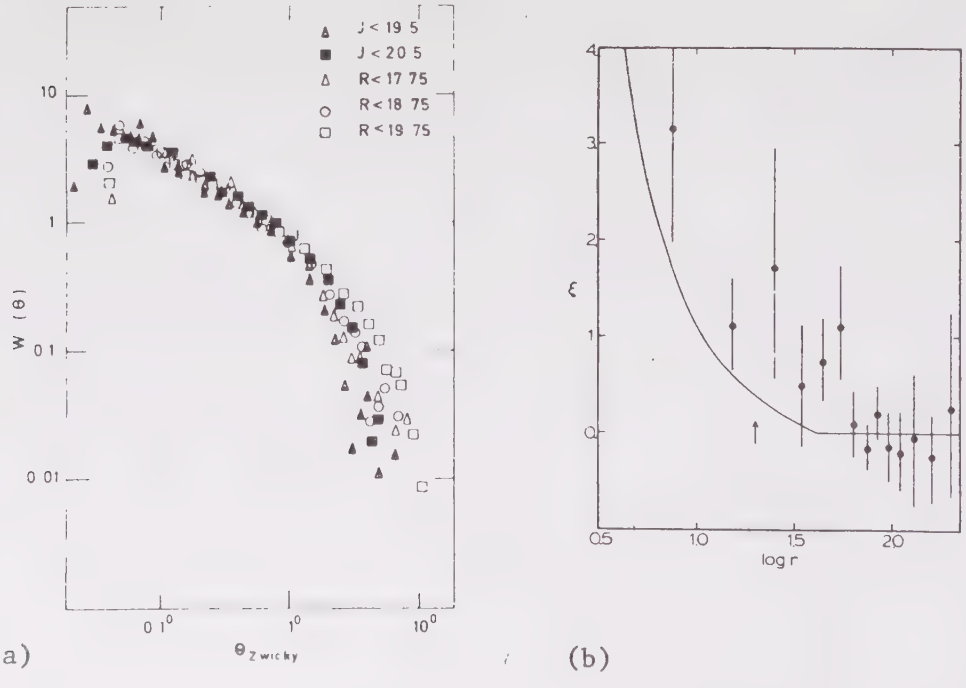
$$hr_0 \sim 5\,Mpc \quad (H = 100h\ km\,s^{-1}\,Mpc^{-1})$$

dans tout le domaine de distance :

$$50 h^{-1} \text{ kpc} \lesssim r \lesssim 9 h^{-1} \text{ Mpc}$$

D'autre part, les graphiques précédents semblent mettre en évidence une cassure (transition linéaire-non linéaire ?) de ξ vers $9h^{-1}$Mpc dont l'existence est controversée. Shanks et al. (1979) ont alors effectué une analyse de même type sur cinq plaques de Schmidt (comportant chacune 1300 galaxies environ) permettant d'échantilloner jusqu'à une magnitude de 21,5(670 h^{-1}Mpc !). Les résultats (figure III-a) obéissent encore à une loi d'échelle et une fois ramenés à la profondeur du catalogue de Zwicky montrent là aussi une dépendance de $w(\theta)$ proportionnelle à $\theta^{-0.8}$ et une cassure vers $9h^{-1}$ Mpc. Cependant les résultats de KOS (Kircher Oemler - Schechter 1979), obtenus par une méthode plus directe, sont sensiblement différents. Ces auteurs ont rassemblés un échantillon restreint (75 galaxies), mais comportant tous les décalages vers le rouge, ce qui permet d'évaluer ξ sans passer par l'intermédiaire de $w(\theta)$. Les galaxies de leur échantillon sont suffisament éloignées (2000 km s^{-1} $\lesssim$ vitesse de récession $\lesssim$ 20.000 km s^{-1}) pour que leur décalage Doppler soit un bon indicateur de distance. Les corrélations observées n'étant plus diminuées par les effets de projection ($w(\theta) \propto 1/D^*$), elles peuvent être estimées à grande distance. Aucune cassure ne semble apparaître (Voir fig. III.b).

Fig.III



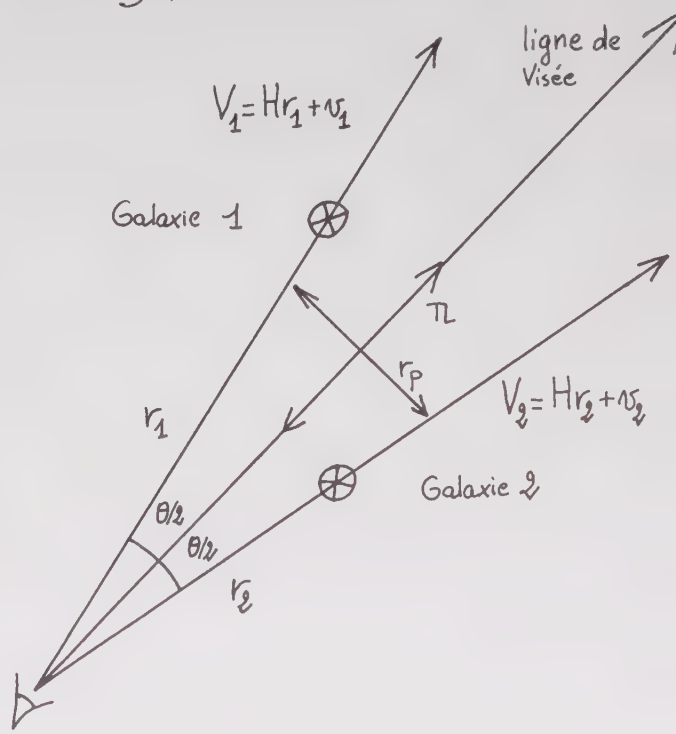
a) Fonction de corrélation (Shanks et al. 1979) ramenée à la profondeur de Zwicky pour 5 plaques de Schmidt.
b) $\xi(r)$ d'après KOS (1979) la flèche indique la position de la cassure trouvée par d'autres auteurs.

Cette incertitude sur un résultat aussi crucial montre l'intérêt du catalogue Cfa en cours de constitution (Davis et al. 1978, Huchra et al.1982). Ce catalogue comporte lui aussi les décalages vers le rouge et résulte d'un compromis entre la largeur du domaine exploré (2,7 stéradian et sa profondeur (14,5 m_B). Il se situe donc à un niveau intermédiaire entre un échantillon peu profond mais de très large ouverture (Shapley-Ames) et un échantillon type KOS. Il comporte à l'heure actuelle 2400 galaxies dont 1300 peuvent être utilisées pour constituer un échantillon homogène (Davis et Peebles, preprint 1982). Considérant des galaxies relativement éloignées, ces auteurs peuvent utiliser le décalage vers le rouge comme un indicateur de distance et calculer ξ directement (fig. IV a). Mais ils peuvent aussi obtenir une partie de l'information sur l'espace de phase distance-vitesse en considérant des galaxies proches de vitesse de récession similaire. Ceci permet de tracer $\xi(r_p,\pi)$ (voir figure IV.b) en définissant :

$$r_p = (V_1+V_2)/H_0 \; tg\,\theta/2 \quad (\sim \Delta r_\perp)$$

$$\pi = (V_1-V_2) \quad (= Hr_\parallel + \Delta v_\parallel)$$

où r_p est la séparation perpendiculaire à la ligne de visée et π est la différence de vitesse le long de ligne de visée. π peut se découper en flot de Hubble $Hr_\parallel$ et différence de vitesse propre $\Delta v_\parallel$



Utilisant alors un modèle* pour la distribution de vitesse relative, ils peuvent par exemple évaluer la dispersion de vitesse $\sigma(r_p)$ de galaxies

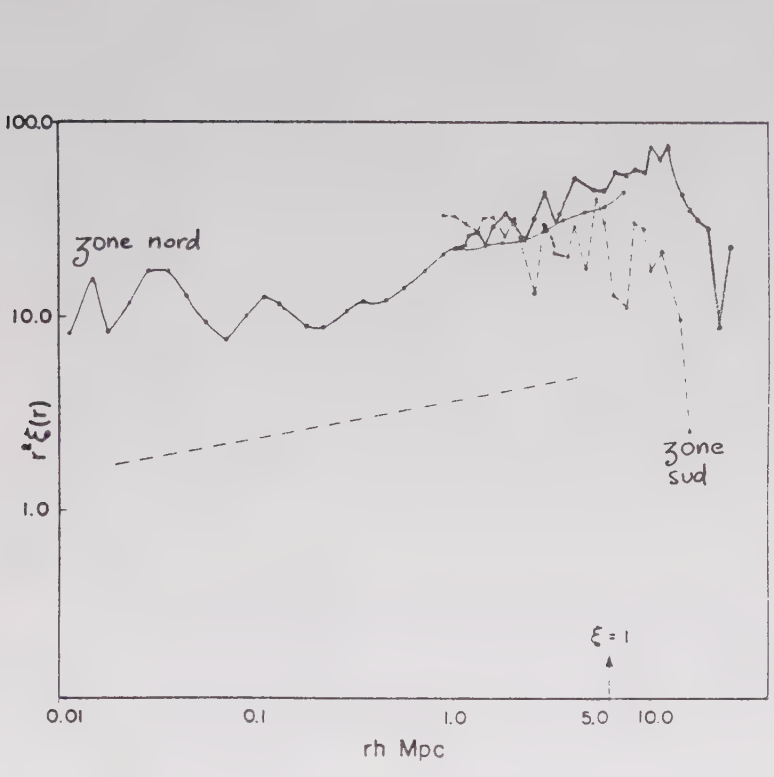
---

* $f(V) \propto \exp(-\sqrt{2}\,|V|/\sigma(r_p))$

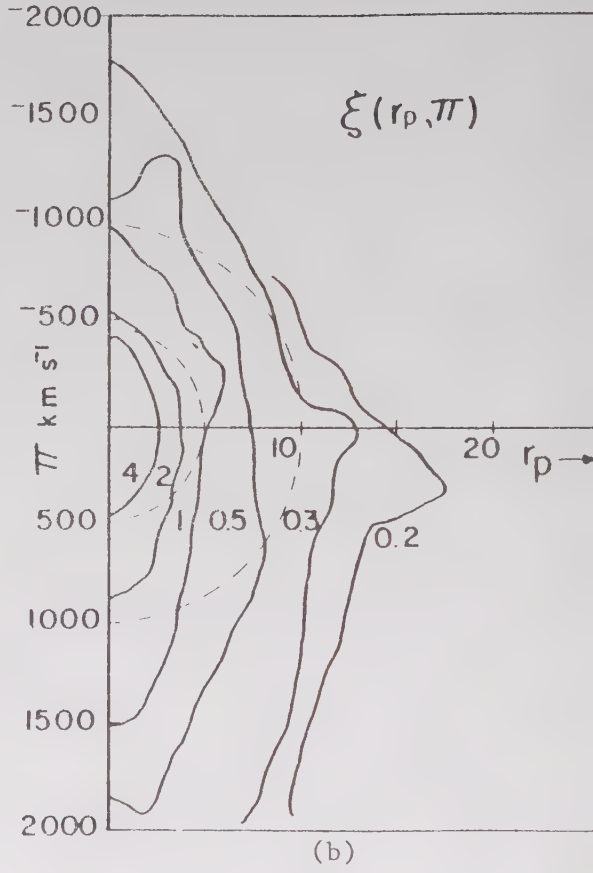
$V = \pi - H_0 \Delta r_\parallel (1 - h\sqrt{r_p^2 + \Delta r_\parallel^2})$, $h = 1/[1+(r/r_0)^2]$

vues en projection séparées de r_p :

$$\sigma(r_p) \sim 340 \left(h r_p / 1\,\mathrm{Mpc}\right)^{0,13} \mathrm{km\,s^{-1}}$$



(a)



(b)

Figure IV

a) Comparaison de $\xi(r)$ dans les zones nord et sud et avec une loi de puissance en $r^{-1,8}$

b) courbes de niveau de $\xi(r_p,\pi)$. Les cercles correspondent aux contours attendus si les vitesses propres sont négligeables ($\Delta v_{//} \ll H r_{//}$)

Nous avons vu au b) que les corrélations à 3 points pouvaient être décrites par leur partie réduite ζ_{123}. Groth et Peebles (1977) ont utilisé le catalogue Lick pour évaluer celle-ci à partir de la corrélation angulaire réduite z_{123}. Ils ont montré que les observations sont bien approximées par le modèle suivant :

$$\zeta_{123} = Q\left[\xi_{12}\xi_{23} + \xi_{23}\xi_{31} + \xi_{31}\xi_{12}\right] \quad \text{avec } Q = 1,29 \pm 0,21$$

C'est-à-dire qu'on peut exprimer les corrélations à trois points (réduites) par des produits symétrisés de fonctions de corrélation à *deux* points.

Cette fonction de corrélation à trois points ne met donc pas en évidence de préférence pour les structures linéaires (o–o–o par opposition aux structures de type groupe) favorisées par les théories de "crèpes".

Fry et Peebles (1978) ont poussé l'analyse des catalogues Lick et Zwicky à l'ordre supérieur. Ils ont montré que la partie spatiale réduite des corrélations à 4 points η_{1234} (tirée de la fonction angulaire u_{1234}) obéit encore à la loi d'échelle prévue et est compatible avec une simple généralisation du modèle à trois points :

$$\eta_{1234} = R_A\left[\sum_{12}\sum_{23}\sum_{31} + \text{sym}(12\ \text{termes})\right] \qquad R_A = 2{,}5 \pm 0{,}6$$

$$+ R_B\left[\sum_{12}\sum_{13}\sum_{14} + \text{sym}(4\ \text{termes})\right] \qquad R_B = 4{,}3 \pm 1{,}2$$

De plus là encore la distribution ne semble pas privilégier les structures filamentaires. En effet, dans ce cas, l'écart entre les observations et le modèle devrait augmenter avec l'élongation de la configuration. Définissant ε comme deux fois l'aire comprise entre les lignes joignant les quatre galaxies, divisée par le carré de la distance entre les galaxies les plus éloignées, et appelant δ le rapport $(u_{obs} - u_{model})/u_{obs}$, $\delta(\varepsilon)$ devrait augmenter à petit ε, ce qui n'est pas le cas (Voir fig. V). Donc les filaments éventuels sont rares ou d'épaisseur suffisante pour échapper à cette analyse à petite échelle angulaire ($\theta < 1°$)

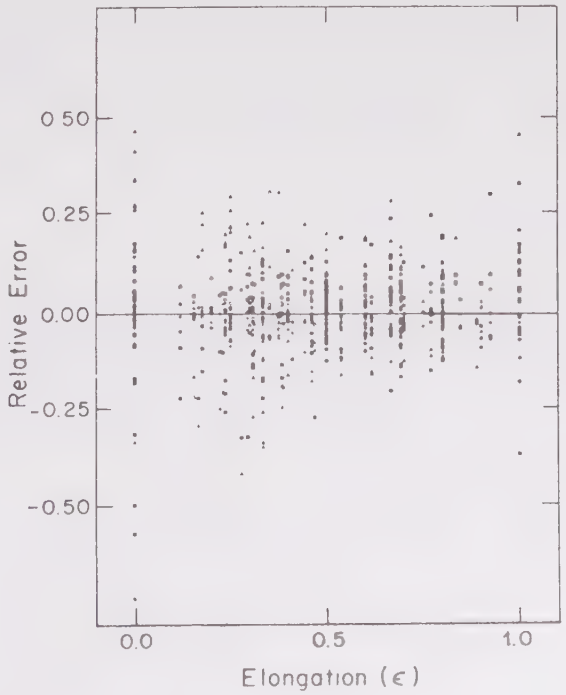


Figure V

Test de la présence de filaments (extrait de Fry et Peebles 1972)

Enfin Soneira et Peebles (1977) ont montré que même les galaxies de champs, c'est à dire isolées, sont corrélées entre elles. Il n'existe pas de population uniforme substantielle (moins de 18% des échantillons) de galaxies.

En résumé, les études précédentes montrent que les corrélations obéissent aux lois d'échelle tirées de l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers aux grandes échelles. D'autre part :

- ξ est décrit dans un large domaine par une loi de puissance d'exposant $\gamma = 1{,}8$. La réalité d'une cassure à $9h^{-1}$ Mpc n'est pas assurée.
- Les décompositions des fonctions de corrélation réduites à 3 et 4 points en produits symétrisés de fonctions de corrélation à deux points sont compatibles avec les observations. Ces fonctions ne permettent pas de mettre en évidence, aux "petites" échelles étudiées, de structure linéaire privilégiées.

Enfin la constitution de catalogues complet en décalage vers le rouge commence à donner accés à une partie de l'information sur l'espace de phase.

3) Approches théoriques

L'ensemble des résultats précédents a suscité un grand nombre de travaux analytiques*, mais on ne dispose pas à l'heure actuelle de théorie complète reliant les fluctuations "primordiales" (à la recombinaison) à la distribution observée. Il est (relativement) aisé de construire des distributions modèles, sans dynamique, conduisant aux fonctions de corrélations observées (a) ou bien de suivre l'évolution linéaire des fluctuations (b). Par contre, l'évolution non linéaire n'est décrite à l'heure actuelle que par des scénarios généraux où à l'aide d'arguments heuristiques (c), ce qui justifie le recours aux simulations numériques

a) Modèles sans dynamique

Dans ce type d'approche on cherche à reproduire les corrélations observées à l'aide de distribution-modèle simple.
Un des modèles envisagés place les galaxies dans des amas tous semblables

---

*Voir les revues de Layzer (1975), Jones (1976), Fall (1979), et le livre de Peebles (1980)

de profil $\mathcal{N}(r)^*$, disposés aléatoirement. Dans ce cas $\xi(r)$ est simplement proportionnel au recouvrement des profils de densité $\int d^3r_0 \mathcal{N}(r_0)\mathcal{N}(r_0+r) \sim r^{3-2\alpha}$ On a alors $\gamma = 2\alpha - 3$, ce qui donne bien $\gamma = 1,8$ pour $\alpha = 2,4$. Cependant $\xi(r, r, r)$ est alors proportionnel à $r^{3-3\alpha}$, ce qui donne $2\gamma = 3-3\alpha$, relation qui ne peut être satisfaite par les valeurs précédentes.
Un autre type de modèle consiste à disposer les galaxies en groupes, qui forment des amas appartenant eux-même à des super-amas... etc...(modèles hiérarchiques, éventuellement tronqués à un certain niveau). Plus généralement on peut développer un formalisme à base de fonctionnelle génératrice (i.e. McClelland et Silk 1976 a,b, 1978, White 1975) pour relier n'importe quel spectre de taille de fluctuations (celles-ci pouvant être distribuées au hasard ou hiérarchiquement) aux fonctions de corrélations. Une fois obtenues les "bonnes" fonctions de corrélation, il reste cependant à expliquer comment est apparue une telle organisation.

Un modèle hiérarchique remarquable par son élégance et sa simplicité mérite cependant d'être rappelé. Mandelbrot (1975) propose de disposer une galaxie à chaque étape d'une marche au hasard, de direction aléatoire et de longueur de pas ℓ obéissant à la distribution

$$\begin{cases} P(>\ell) = (\ell_0/\ell)^\alpha & \ell \geqslant \ell_0 \quad (\alpha > 0) \\ P(>\ell) = 1 & \ell < \ell_0 \end{cases}$$

Dans le cas où $\alpha > 2$ on retrouve le résultat classique d'une marche au hasard de longueur de pas ℓ fixe**. Par contre si $\alpha < 2$ il est facile de montrer que la densité de probabilité d'avoir un déplacement r , au bout d'un nombre quelconque de pas, est donnée par :

$$f(r) \propto r^{-\gamma} \quad , \qquad \gamma = 3 - \alpha$$

---

*Ce profil est connu expérimentalement et correspond au nombre de galaxies en fonction de la distance dans des amas riches (ou, dans une partie de la littérature, fonction de corrélation croisée centre d'amas-galaxies ξ_{ag} on a : $\mathcal{N}(r) \propto r^{-\alpha}$, $2,1 \leqslant \alpha \leqslant 2,5$ (Seldner et Peebles 1977, Chincarini et Rood 1976)

**La distribution de probabilité d'avoir un déplacement r, au bout de n pas est donnée par : $f_n(r) \propto \exp(-kr^2/n)$, $k = \frac{3(\alpha-2)}{2\alpha\ell_0^2}$
(pas de déplacement dans la limite $n \to \infty$)

ce qui ne dépend plus de n. On retrouve donc la distribution observée pour $\alpha = 1{,}2$. De plus, la probabilité de trouver trois galaxies en r_1, r_2 d'une galaxie donnée s'écrit :

$$dP = 2\left[f(r_1)f(r_1-r_2)+f(r_2)f(r_1-r_2)+f(r_1)f(r_2)\right]dV_1\,dV_2$$

Les différents termes correspondants à l'ordre dans lequel se présentent les trois galaxies au cours de la marche au hasard. Ceci conduit donc naturellement à la décomposition observée de ξ_{123}, et l'argument s'étend trivialement aux corrélations à quatre points η_{1234}.

Les modèles hiérarchiques comme celui-ci présente par ailleurs une propriété intéressante. Si chaque niveau de structure (de taille caractéristique D et de densité proportionnelle à $D^{-\gamma}$) est en équilibre gravitationnel (structures "virialisées"), leurs sous-structures de niveau juste inférieur ont une agitation thermique telle que :

$$\langle V^2\rangle^{1/2} \sim \left[\frac{GM(D)}{D}\right]^{1/2} \sim D^{1-\gamma/2}$$

Dès 1907, Fournier d'Albe remarque que pour $\gamma = 2$, ce qui est remarquablement proche de l'exposant "réel", l'agitation thermique est invariante d'échelle , comme il convient dans le cas d'une hiérarchie continue pour éviter les divergences. Nous verrons (III - d) qu'il est possible de retrouver une propriété similaire, *en tenant compte cette fois de l'expansion*, grâce à l'utilisation du théorème d'énergie cosmique.

Ce modèle de Mandelbrot exposé ci-dessus est un modèle de hiérarchie *continue*; repoussant la profondeur à laquelle il regarde, un observateur découvre toujours une structure plus vaste englobant celles déjà observées. Les modèles de hiérarchie continue ne sont évidemment pas compatible avec l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie à grande échelle, et les amplitudes des corrélations angulaires calculées sont invariantes d'échelle. Or nous avons vu que la loi d'échelle tirée de l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie (amplitude de $w(\theta) \propto 1/D$) était remarquablement bien vérifié par les observations.

Ceci a amené Mandelbrot à proposer une hiérarchie tronquée, résultat de marches au hasard distribuées aléatoirement, de nombre de pas fini. On peut alors obtenir l'accord complet avec les observations (ξ, ξ, η) à condition de faire aussi varier ℓ_0 pour chaque marche. Mais le modèle perd alors de son attractive simplicité.

b) Evolution linéaire des fluctuations

Une autre approche consite à tenter de relier la distribution de la matière observée aujourd'hui à des fluctuations primordiales données. Cependant la physique aux grands décalages vers le rouge ($z \gg 10^3$) commence à peine à être abordée et les fluctuations de densité à ces époques peuvent être dûes à de multiples phénomènes*. Dans ces conditions, l'hypothèse la plus raisonnable revient à appliquer un principe d'ignorance maximal. On suppose que les fluctuations ont pour origine un processus physique aléatoire et isotrope ne présentant pas d'échelle caractéristique. Un spectre "initial" plausible au cours de la période où la densité d'énergie de l'Univers est dominée par les radiations peut se caractériser par son spectre de Fourier :

$$\begin{cases} \delta(x) = [\rho(x) - \bar{\rho}] / \bar{\rho} = \int \delta_k e^{ikx} d^3k \\ |\delta_k|^2 \propto k^n \quad , \quad -3 \leq n \leq 4 \end{cases}$$

Les cas les plus étudiés correspondent à n=0 (bruit blanc) et n=1 (fluctuations toutes de même courbure).
Deux cas se présentent alors. Si ces fluctuations sont de type isotherme (ne concernant que la matière , le fond de radiation n'étant pas perturbé). les fluctuations de masse inférieure à la masse de Jeans (échelle où la pression de radiation est comparable à l'attraction gravitationnelle,

---

* elles peuvent, par exemple, résulter de l'évolution de fluctuations ab initio dans un univers globalement homogène, ou résulter des fluctuations au cours des transitions de phase considérées par les théories grand unifiées ou bien encore être le résidu d'un chaos "initial" amorti par un processus à déterminer!

voir II - 1) oscillent comme des ondes sonores. A la recombinaison la masse de Jeans diminue de plusieurs ordres de grandeur (la pression de radiation dûes aux diffusions Thomson devient très faible quand les électrons se combinent aux noyaux) et toutes les longueurs d'ondes supérieures à la nouvelle longueur de Jeans (qui vaut alors $10^6 - 10^7\ M_\odot$) croissent.

Par contre dans le cas de fluctuations adiabatiques (perturbations simultanées des photons et des baryons) il apparait à l'issue de la recombinaison une longueur d'onde de coupure beaucoup plus grande dûe à la viscosité des photons (correspondant à $10^{14} M_\odot$ approximativement) en dessous de laquelle toutes les fluctuations sont fortement atténuées. Le spectre de fluctuation juste après la recombinaison peut alors se modéliser par :

$$\begin{cases} |\delta_k|^2 \propto k^n & \text{si } k < k_{max} \\ |\delta_k|^2 = 0 & \text{si } k > k_{max} \end{cases}$$

Le problème posé consiste donc à suivre l'évolution de ces spectres de fluctuations "primordiales".

Tant que celles-ci sont de faible amplitude, elles peuvent être décrites par linéarisation de l'équation fluide Newtonienne*

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{\nabla^2 P}{\bar\rho a^2} + \frac{1}{a^2}\nabla(1+\delta)\nabla\Phi + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\left[(1+\delta)v^\alpha v^\beta\right]$$

où a(t) est le facteur d'expansion. Dans l'approximation linéaire, le dernier terme disparait et, négligeant les gradients de pression (M $\rangle$ Masse de Jeans), il ne reste que :

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot a}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} = 4\pi G\bar\rho\delta$$

---

*La description de la croissance linéaire relativiste est dûe à Lifshitz (1946) et se trouve par exemple dans Weinberg (1972) p. 578.

On montre alors (Weinberg 1972 § 15-9 ou Peebles 1980 p. 45) que le mode croissant augmente d'amplitude comme $t^{2/3}$ (c'est-à-dire comme le facteur d'expansion a) tant que $\Omega \sim 1$ (en fait tant que z est grand devant $z_f = 1/\Omega - 1$). A ce décalage vers le rouge, toutes les structures sont gelées, sauf celles ayant déjà atteint la phase non linéaire qui peuvent continuer à croître. La partie linéaire de la fonction de corrélation $\xi = \langle \delta(x)\delta(x+r)\rangle$ (dans la limite fluide) est donc simplement proportionnelle à sa forme à la recombinaison :

$$\xi(r) = \xi_{rec}\left(r\frac{a_r}{a}\right) \begin{cases} (a/a_r)^2 & z \gg z_f \\ \text{cste} & z < z_f \end{cases}$$

ce qui donne pour les spectres de fluctuations considérés :

$$\xi(r) \propto r^{-(3+n)} \quad , \quad \xi < 1$$

où n est l'exposant du spectre de fluctuation initial. Malheureusement les observations ne concernent que la partie non linéaire ($\xi > 1$) et n ne peut donc être mesuré directement.

Au lieu d'utiliser les équations fluides, il est aussi possible d'utiliser la description microscopique des équations cinétiques (hiérarchie BBGKY) qu'on linéarise (approximation de faible couplage) ce qui permet d'obtenir l'évolution de la fonction de distribution à une particule (Fall et Saslaw 1976, Inagaki 1976, Yahil 1976, Norman et Silk 1978).

c) Evolution non linéaire des perturbations

L'évolution linéaire des fluctuations ne dépend pas d'une coupure éventuelle du spectre à grand k (fluctuations adiabatiques) par contre l'évolution non linéaire conduisant à la distribution observée change selon le type de fluctuations envisagé . Dans le cas de fluctuations adiabatiques les grandes structures ($\sim 10^{14}$ $M_\odot$) se forment les premières par collapse dans une direction (formation des "crèpes"). Ces structures, formées récemment ($z \sim 4$) se fragmentent à leur tour pour donner naissance aux petits

amas et aux galaxies (i.e. Doroshkevich et al. 1974). Un des problèmes de cette approche est qu'on ne sait pas calculer au-delà du collapse des grandes structures et qu'il faut avoir recours aux simulations numériques.

Dans le cas de fluctuations de type isotherme, les plus petites "s'effondrent" les premières, suivies par celles un peu plus grandes et ainsi de suite, au fur et à mesure que les structures d'échelle donnée atteignent un contraste de densité suffisant ($\delta \sim 1$). Il se développe donc une hiérarchie, les plus petites structures (au-dessus de la masse de Jeans cependant) étant les premières à se constituer. Peebles (1974) a développé un argument heuristique qu'on peut résumer grossièrement comme suit : à la recombinaison, le contraste de densité est tel que $\delta_{rec}^{\ell} \propto r_{rec}^{-(3+n)}$

Au cours de l'évolution linéaire, δ croît comme nous l'avons vu, comme a(t) on a donc $\delta^{\ell} \propto r_{rec}^{-(3+n)} a^{\ell} \propto (r/a)^{-(3+n)} a^{\ell} \propto r^{-(3+n)} a^{5+n}$

Une fluctuation va commencer à se condenser quand $\delta \sim 1$, c'est-à-dire quand $a_c \propto r_c^{\frac{3+n}{5+n}}$. Il est facile de montrer qu'une perturbation modèle (uniforme et sphérique) dans un univers tel que $\Omega = 1$ à une densité ρ_f à la fin de son effondrement de l'ordre de 5 fois la densité moyenne $\bar{\rho}$ (quelle que soit sa taille), et une taille r_f de l'ordre de la moitié de sa taille au début de son effondrement (théorème du viriel). D'autre part, la densité moyenne varie comme a^{-3}. On a donc $\rho_f \sim 5\bar{\rho}_c$, $r_f \sim r_c/2$, $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ ce qui permet d'écrire $\rho_f \propto a_c^{-3} \propto r_f^{-\left(\frac{9+3n}{5+n}\right)}$. Enfin chaque galaxie appartenant à une hiérarchie, la probabilité d'en trouver une autre à une distance r est proportionnelle en première approximation à la densité à cette échelle r . On a donc :

$$\xi(r) \propto r^{-\gamma} \quad , \quad \gamma = \frac{9+3n}{5+n}$$

ce qui conduit à $\gamma = 1{,}8$ pour un bruit blanc n = 0, en accord remarquable avec les observations. Cependant le raisonnement précédent suppose, entre autre, que la forme de ξ dans le domaine linéaire est conservée dans le domaine non linéaire (aucun "réarrangement" de la distribution, sous l'effet des interactions à deux corps (collisions) par exemple). Cette

supposition apparait encore plus explicitement dans la dérivation proposée par Davis et Peebles (1977)*. Or la question de savoir dans quelle mesure la distribution actuelle reflète la distribution initiale est tout à fait ouverte actuellement (ξ pourrait être une fonction universelle dépendant peu ou pas du tout des conditions initiales à la suite de l'évolution turbulente). C'est précisément ce type de question que les simulations numériques pourront aider à résoudre (Voir chapitre IV). L'examen de la seule approche analytique existante de l'évolution non linéaire sera exposée au chapitre III qui est consacré à son amélioration .

---

*Dans ce cas on suppose une évolution *autosimilaire* en x/t^{α} de ξ, qui dans le domaine fortement *non-linéaire* doit varier comme $a^3 g(ax)$ (Voir III-b)

On a donc ($\Omega = 1$, $a \propto t^{2/3}$) : $(x/t^{\alpha})^{-\gamma} = t^{2}(t^{2/3}x)^{-\gamma}$ ce qui donne $\gamma = 6/(3\alpha+2)$

D'autre part, nous avons vu que dans le domaine *linéaire* on a

$$|\delta_k|^2 = t^{3\alpha}\int d^3\left(\frac{x}{t^{\alpha}}\right)\xi\left(\frac{x}{t^{\alpha}}\right)e^{it^{\alpha}k\frac{x}{t^{\alpha}}} = t^{3\alpha}F(t^{\alpha}k) \quad \text{et} \quad |\delta_k|^2 \propto t^{4/3}k^n$$

ce qui donne $\alpha = 4/(9+3n)$ et donc $\gamma = (9+3n)/(5+n)$. Cet exposant est donc déterminé par le raccord linéaire-non linéaire en supposant une forme de ξ invariante.

CHAPITRE II

PRESENTATION DU FORMALISME

CHAPITRE II

PRESENTATION DU FORMALISME

La théorie développée dans ce travail repose sur deux hypothèses concernant les interactions décrites. En effet, dans tout ce qui va suivre, la seule force prise en compte est l'interaction gravitationnelle, et elle n'agit que sous la forme d'un champ moyen, c'est-à-dire que l'on considère l'évolution non-collisionnelle des objets décrits. Ce chapitre est destiné à commenter ces deux hypothèses couplées et à en déduire les conséquences mathématiques.

1) Description des interactions

a) Interactions prises en compte

La seule force considérée est l'interaction gravitationnelle. Ceci n'est certainement pas vrai aux échelles inférieures à quelques rayons galactiques ($\sim 100h^{-1}$ kpc aujourd'hui) où il faut par exemple prendre en compte les collisions inélastiques pour expliquer la formation des galaxies. Mais nous ne sommes intéressés ici qu'à l'évolution de la distribution des galaxies, quelle que soit la manière dont elles apparaissent. Elles seront donc considérées dans la suite comme des objets ponctuels, pris pour simplifier, de masse égale* En considérant seulement la gravitation quelle que soit l'échelle, on renonce par conséquent à décrire l'évolution aux petites échelles qui conduit à la formation des galaxies. On peut par

*étant donné les difficultés considérables du traitement analytique, malgré cette simplification quelque peu abusive, il semble que les simulations numériques soient l'outil le plus adapté pour aborder les nombreux problèmes dûs à un spectre de masse.

contre espérer décrire de manière adéquate l'évolution de la distribution des objets formés, les résultats obtenus perdant évidemment toute signification aux très courtes distances. Par ailleurs, les fonctions de corrélation à l'ordre 2 et 3 ne sont connues que jusqu'à environ $10h^{-1}$ Mpc, c'est à-dire quand elles sont supérieures ou égales à l'unité. On s'intéresse donc aux phénomènes non-linéaires dus à la gravitation entre objets ponctuels de même masse, aux échelles comprises entre $100h^{-1}$ kpc et $10h^{-1}$ Mpc.

b) Limite Newtonienne

Dans ce domaine, la description de la gravitation par sa limite Newtonienne est excellente. En effet, cette limite est obtenue quand $v \ll c$. Des objets massifs très denses se comporteront comme des masses ponctuelles obéissant aux lois de Newton aux distance telles que la vitesse de libération v_f soit petite devant la vitesse de la lumière c, c'est-à-dire

$$\frac{GM^2}{r} = \frac{1}{2} v_f^2 \ll \frac{c^2}{2} \iff r \gg \frac{2GM}{c^2}$$

Les trous noirs les plus massifs pouvant, pense-t-on, atteindre 10^9 Masses solaires, on obtient donc la borne inférieure $r \gg 10^{-4}$ pc.
Par ailleurs, considérons maintenant la distribution moyenne de masse de densité $\bar{d}$. La vitesse de libération est toujours donnée par $\frac{GM}{r} = \frac{1}{2} v_f^2$ mais cette fois M(r) croît comme le volume et la condition $v_f \ll c^2$ s'écrit $G\rho r^2 \ll c^2$. Or pour $\bar{d}$ de l'ordre de la densité critique, le temps écoulé depuis la singularité initiale est approximativement donné par $t \sim (G\bar{d})^{-1/2}$. Ce qui veut dire qu'à l'autre extrême la mécanique Newtonienne est valable aux distances petites devant l'horizon $ct \sim 3000$Mpc. La limite classique est donc légitime aux échelles telles que

$$10^{-7} \text{ kpc} \ll r \ll 3000 \text{ Mpc},$$

ce qui suffit largement pour notre problème.

c) Limite non collisionnelle

Voyons maintenant quelle catégorie d'objets est décrite par une théorie de champs moyen . Pour cela, on commence par évaluer deux longueurs caractéristiques d et l. La première est la distance où l'energie gravitationnelle et l'énergie thermique de deux particules sont

comparables : $\frac{Gm^2}{d} \sim m\sigma^2$, où σ est la dispersion de vitesse. la seconde est leur distance moyenne $\ell = (4\pi \bar{n}/3)^{-1/3}$, où $\bar{n}$ est encore le nombre moyen de particules par unité de volume. Une "collision" correspond à une déviation forte d'une particule par une autre. Si $d \ll \ell$, elles seront peu fréquentes, c'est-à-dire que l'évolution d'une particule sera essentiellement déterminée par le champ moyen de toutes les autres et non par les interactions binaires. Cette condition peut d'ailleurs s'exprimer différement. On appelle longueur de Jeans λ_J le rayon critique à partir duquel un objet sphérique de masse M n'est plus soutenu par sa pression et s'effondre sous l'influence de sa propre gravité. On a

$$\frac{GM^2}{\lambda_J} \sim PV \sim P\lambda_J^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{GM}{\lambda_J} \sim \frac{P}{d} \sim \sigma^2$$

L'inégalité $d \ll \ell$ se traduit alors par ($M = m\bar{n}V = dV$) :

$$\frac{Gm}{\sigma^2} \sim \frac{\lambda_J}{\bar{n}\lambda_J^3} \ll \ell \sim \bar{n}^{-1/3} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}\lambda_J^3 \gg 1$$

Et si on sépare le champ subi par une particule en une contribution moyenne dûe aux particules hors la sphère de Jeans plus des interactions binaires dûes aux particules à l'intérieur, on voit que la condition exprime que la particule n'est sensible qu'à un champ moyen s'il y a beaucoup de particules dans la sphère de Jeans.

Selon le scénario de formation hiérarchisée, les structures de petite échelle sont les premières à apparaître. Au fur et à mesure que des échelles de plus en plus grandes rentrent dans le domaine non linéaire et que se constituent des structures plus complexes, les premières structures disparaissent. Les galaxies sont alors le résultat de la fusion d'irrégularités de petite échelle. Pour Davis et Peebles, qui se placent dans le cadre de ce scénario, les objets considérés par la théorie non collisionnelle sont alors des fluctuations de densité d'échelle petite devant la longueur de Jeans, qui est elle-même extrêmement petite devant la taille d'une galaxie* (tout du moins après la recombinaison). Evidemment la

---

*la masse de jeans au moment où les noyaux se combinent avec les electrons (la recombinaison) vaut environ 10^5-$10^7 M_\odot$ (Weinberg-Gravitation p.564) en prenant la température des photons aujourd'hui égale à 2,7°K, et la densité aujourd'hui comprise entre 10^{-30} et 3.10^{-29} g/cm^3 ($\Omega = 0,05$ et $\Omega \sim 1,6$).

distribution de masse à l'échelle de la galaxie s'homogénéise au cours de l'évolution et les résultats ne sauraient s'appliquer à cette échelle et aux échelles plus petites.

Cependant il est important de remarquer qu'une théorie non-collisionnelle n'est pas limitée dans son application à ce seul scénario. En effet, supposons qu'on se donne les caractéristiques de la distribution des galaxies à un moment donné (résultant par exemple de la théorie des "crèpes"), et que l'on cherche seulement l'évolution de cette distribution, il suffit alors que les galaxies elles-mêmes soient non-collisionnelles. La revue très complète de Felten (1977) et les résultats de Kirshner et al. (1979) plaident pour une normalisation de la distribution de luminosité des galaxies Φ (M) (qui donne le nombre de galaxies par unité de volume ayant une magnitude comprise entre M et M + dM) qui correspond à une densité d'environ 0,02 h^3 galaxies par Megaparsec cube (avec toujours $H = 100h$ km s^{-1} Mpc^{-1}). Par ailleurs, l'analyse récente du catalogue CFa par Davis et Peebles (preprint 1982) conduit à une dispersion de vitessse σ de l'ordre de 340 km s^{-1}. Appelant ε le rapport d/ℓ pour les galaxies, on a :

$$\varepsilon \sim \frac{GM_G}{\sigma^2}\bar{n}^{1/3} \sim 1.\,10^{-3}\,h\left(\frac{M_G}{10^{11}M_\odot}\right)\left(\frac{\bar{n}}{2.10^{-2}(h=1)\,Mpc^{-3}}\right)^{1/3}\left(\frac{\sigma}{340 km\,s^{-1}}\right)^{-2}$$

la valeur de $\bar{n}$ apparait comme étant assez largement acceptée. Bien qu'on ne voit pas décroître les courbes de rotation des galaxies à grande distance (et donc qu'on ne détecte pas le bord du halo sombre), 10^{11} Masses solaires semble une masse typique raisonnable pour une galaxie. La question reste cependant ouverte . Il n'y a malheureusement pas actuellement de consensus sur la valeur de σ *. Cependant même avec la valeur extrême de 100 km s^{-1}

---

* On trouve dans la littérature, suivant les auteurs, les méthodes et les catalogues étudiés les valeurs suivantes pour σ :
$\sigma \sim 200 - 600$ kms^{-1} (Peebles 1976), $\sigma \sim 300$km s^{-1} (Davis et al. 1978),
$\sigma \sim 450$ km s^{-1} (Peebles 1979), $\sigma \sim 450$ km s^{-1} (Peebles 1981),
$\sigma \sim 200 - 250$ (Efstathiou et al. 1982), $\sigma \sim 450$ km s^{-1} (Rivolo et Yahil 1981)
$\sigma \sim 100$ km s^{-1} (Sandage et Tamman 1982).

(Sandage et Tammam 1982) on a encore $\mathcal{E} \sim 1.6\ 10^{-2} h$ avec les valeurs nominales de M_G et $\bar{n}$. Il faut cependant remarquer que ce raisonnement n'est valable que dans la mesure où les galaxies sont les principales sources du champ gravitationnel. En particulier, il est erroné dans le cas d'un Univers dominé par des neutrinos massifs peu "piégés" par les galaxies. Evidemmment ces neutrinos pourraient être alors considérés comme les objets fondamentaux de la statistique (certainement non-collisionnels!), mais les tests observationnels de la théorie seraient alors pour le moins malaisés! L'évolution de la distribution des galaxies peut donc (aux réserves précédentes près) être décrite par une théorie de champs moyens de l'interaction gravitationnelle dans sa limite Newtonienne.

2) Coordonnées utilisées

Etant donné qu'en moyenne (sur des échelles suffisamment grandes) l'Univers est homogène et isotrope, il est commode de décrire la distribution réelle de matière de l'Univers en terme de *déviations* par rapport à un Univers modèle parfaitement homogène et isotrope de même densité de masse moyenne $\bar{d}(t)$.

a) Coordonnées comobiles

Dans un tel Univers, la séparation r(t) de deux particules doit forcément varier comme a(t) x, où x est une constante et a(t) (appelé facteur d'échelle ou d'expansion) est une fonction universelle. La vitesse relative des deux particules est donnée par la loi de Hubble $\dot{r} = Hr$, avec $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$, le nom de "constante de Hubble" attribué à H faisant référence à son invariance spatiale. Décrivant le mouvement d'une particule dans le référentiel de l'autre, on a :

$$\ddot{r} = -\nabla \bar{\varphi} \quad , \quad \Delta \bar{\varphi} = 4\pi G \bar{d}(t)$$

ce qui donne l'équation d'évolution du facteur d'expansion, qui ne dépend évidemment pas du référentiel choisi :

$$\ddot{a} = -4\pi G \bar{d}(t) a / 3$$

Si maintenant l'Univers n'est plus strictement homogène et isotrope, on écrit encore r = a(t)x, mais x est maintenant fonction du temps. La vitesse de la particule se décompose alors en un "flot de Hubble" plus une vitesse propre : r = Hr + ax. Ecrivons le lagrangien de la particule en variable x, dite coordonnée comobile :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{a}x + a\dot{x})^2 - m\varphi(x,t)$$

On sait qu'on ne change pas la variation de l'action, et donc les équations du mouvement en ajoutant au lagrangien la dérivée totale par rapport au temps d'un fonction quelconque de la (ou des) coordonnée(s) et du temps f(x,t). En prenant $f(x,t) = -\frac{1}{2} m a\dot{a}x^2$, et en posant $\tilde{\Phi} = \varphi + \frac{1}{2} a\dot{a}x^2$ on peut réécrire le lagrangien comme suit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m a^2 \dot{x}^2 - m\tilde{\Phi} \quad \text{avec} \quad \Delta_x \tilde{\Phi} = a^2 \Delta_r \varphi + 3a\ddot{a}$$

Utilisant le principe de moindre action, les équations du mouvement sont données par : $\frac{dp}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad ; \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$

ce qui ici s'écrit :

$$p = ma^2\dot{x} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -m\nabla_x \tilde{\Phi} \quad \text{avec} \quad \Delta_x \tilde{\Phi} = 4\pi G a^2 [d(x,t) - \bar{d}(t)]$$

l'équation sur le potentiel ayant été transformée en utilisant l'équation d'évolution sur a.

Ceci est le système de coordonnées utilisé généralement (Inagaki, 1976, Davis et Peebles, 1977) pour écrire la hiérarchie BBGKY décrivant l'évolution des fonctions de corrélation. Dans ce système, l'impulsion d'une particule libre ($\tilde{\Phi} = 0$) est constante et une particule au repos le reste. Cependant sa vitesse propre $v = a\dot{x} = \frac{p}{ma}$ *décroît* inversement proportionnellement à a(t)

b) Temps conformel

Il serait pourtant plus agréable que la position *et* la vitesse propre de la particule soient constantes si elle est libre. C'est pourquoi

on effectue le changement de variable temporel $t \to \Theta$, où Θ est relié à t par $d\Theta = dt/a^2$. On a alors :

$$u = \frac{\partial x}{\partial \Theta} = a\dot{x} = \frac{p}{m}$$

et en posant $\Phi = a\tilde{\Phi}$, les équations du mouvement et du potentiel s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \Theta} = u \\ \dfrac{\partial u}{\partial \Theta} = -\nabla_x \Phi \\ \Delta_x \Phi = 4\pi G a^4 \left[d(x,\Theta) - \bar{d}(\Theta) \right] \end{cases}$$

qui plus est, quand la densité de matière domine la densité de radiation ($\forall z$ inférieur à 1000), la densité varie simplement comme a^{-3}. Dans ce cas, on définit la densité comobile $\varrho = a^3 d(x,\Theta)$ et on note $\delta\varrho = \varrho(x,\Theta) - \bar{\varrho}$, où $\bar{\varrho}$ est maintenant une constante, et l'on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial \Theta^2} = -\nabla_x \Phi \\ \Delta_x \Phi = 4\pi G a \delta\varrho \end{cases}$$

Cette fois on décrit effectivement la déviation par rapport à un univers homogène. On a retrouvé les équations classiques (sans expansion) et on voit que l'effet de l'expansion se réduit à faire apparaître un "fond neutralisant" (identique par exemple à la densité de charge des ions dans un plasma) et à "renormaliser"la constante de la gravitation G (définition d'une constante de gravitation "effective" Ga dépendante du temps). C'est ce système de coordonnées que nous utiliserons exlusivement dans la suite aussi bien pour l'approche analytique que pour l'approche numérique. La forme des équations classiques étant inchangée, il suffit d'effectuer la transformation ($r \to x, t \to \Theta$, $G \to Ga$, $\varrho \to \delta\varrho$) dans les équations cinétiques classiques pour obtenir leur transposition dans le cas d'un univers

en expansion. On retrouve alors les équations ayant déjà été obtenues dans différents cas particuliers par changement de variables direct dans les équations classiques*.

c) Equation de Poisson quand $\Omega = 1$

Enfin, avant de passer à l'établissement de ces équations cinétiques, nous allons écrire l'équation de Poisson sous une forme utile pour les calculs numériques. Soit 3-D la dimension des objets décrits par les simulations. Si D =1, on a un univers de plans qui se dilatent uniformément dans deux directions afin que $\bar{d}$ varie bien comme a^{-3}. Si D = 2, c'est alors un univers de barres qui se dilatent, et pour D = 3, c'est l'univers conventionnel de points. Dans ce cas, l'équation d'évolution du facteur d'expansion s'écrit

$$\ddot{a} = - \frac{4\pi G \bar{d}}{D} a$$

que l'on intégre une fois :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \bar{d} a^3}{D a} + k$$

Soit $\Omega(t) = \frac{8\pi G \bar{d}}{D H^2} = \frac{\bar{d}(t)}{d_c(t)}$ où d_c est la densité critique qui est telle que k = 0. Dans le cas particulier où $\Omega = 1$ (Modèle d'Univers Einstein-de Sitter), l'évolution de a en fonction de Θ est donnée par $\frac{1}{a^3}\left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{8\pi G \bar{d} a^3}{D}$. En choisissant la constante d'intégration telle que $\Theta \to 0$ quand $a \to \infty$, on a $4\pi G a(\bar{d}a^3) = \frac{2D}{\theta^2}$. Définissant le contraste adimensionnel de densité $\delta(x,t) = \rho(x,t)/\bar{\rho} - 1$, on obtient l'équation de Poisson sous la forme :

---

*Cas des équations hydrodynamiques (Doroshkevich et al., 1973, Doroshkevich et Shandarin, 1973), cas de l'équation de Vlasov (Doroshkevich et al., 1980) et avec des normalisations différentes, pour les équations fluides, l'équation de Vlasov, et l'évolution des perturbations pour la solution approchée de Zeldovich (1970), Shandarin 1980).

$$\Delta_x \bar{\Phi} = \frac{2D}{\theta^2}\,\delta(x,t)$$

expression que nous utiliserons au cours des simulations numériques.

3) Etablissement des équations cinétiques - notations

a) Lien entre les hiérarchies Klimontovich - BBGKY - Vlasov

Il existe essentiellement deux points de vue dont l'utilisation dépend du problème considéré, pour décrire l'évolution des propriétés statistiques de N-particules. Selon le premier, on considère au départ *la fonction de distribution* exacte à *1 point* dans un espace à N particules, tandis que selon l'autre, la fonction fondamentale est la *densité de probabilité à N points*, toujours dans un espace à N particules. Plus précisément, dans le premier cas on décrit la distribution par la fonction $f(x,u,\theta)$ telle qu'à l'instant θ le nombre de particules avec des positions et des vitesses comprises dans les intervalles $[x, x+dx]$ $[u,u+du]$ (ce qui définit un "point" dans l'espace à 6 dimensions-distances-vitesses) soit donné par

$$dN = f(x,u,\theta)\,d^3x\,d^3u$$

Et f, appelée dans le cas de particules discrètes, fonction de Klimontovitch s'écrit

$$f(x,u,\theta) = \sum_i \delta(x - x_i(\theta))\,\delta(u - u_i(\theta))$$

où $x_i(\theta)$ et $u_i(\theta)$ repèrent la position et la vitesse de la particule numéro i à l'instant θ. Dans le second cas, on définit la probabilité dP de trouver au temps θ la particule 1 dans la position x_1, avec la vitesse u_1 (à dx_1 et du_1 près), la particule 2 dans la position x_2 avec la vitesse u_2 (à dx_2 et du_2 près)... et ainsi de suite jusqu'à N. On a alors :

$$dP = f(x_1,u_1,x_2,u_2,\ldots x_n,u_n,\theta)\,d^3x_1 d^3u_1 d^3x_2 d^3u_2 \ldots d^3x_N d^3u_N$$

$$dP = f(1,2,\ldots N,\theta)\,du_1\,du_2\,du_3, \text{ en posant } du_i = d^3x_i\,d^3u_i$$

Dans le cas de particules discrètes, f s'écrit

$$f(1,2,\ldots N,\theta) = \left\langle \prod_{i=1}^{N} \delta(x_i - x_i(\theta))\,\delta(u_i - u_i(\theta)) \right\rangle$$

où le signe $\langle \ldots \rangle$ signifie la moyenne d'ensemble prise sur des systèmes statistiquement équivalents.

Ecrivant la conservation du nombre de particules et utilisant le théorème de Liouville, on obtient alors l'équation d'évolution de ces deux fonctions :

$$\begin{cases} \dfrac{df}{d\theta} = d_\theta f = \partial_\theta f + u.\nabla_x f + \partial_\theta u.\nabla_u f = 0 \\ \partial_\theta u = -\nabla_x \Phi \quad , \quad \Delta_x \Phi = 4\pi G a \delta\rho \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'équation d'évolution est généralement appelée équation de Klimontovich. Evidemment, dans le second cas, x et u doivent se comprendre comme les vecteurs $x \equiv x(x_1, x_2 \ldots x_N)$ et $u \equiv u(u_1, u_2 \ldots u_N)$, le point dénotant alors le produit scalaire. Cette équation exacte contient toute l'information sur le système et est parfaitement intraitable!

Par des procédés différents selon le cas on génère alors une *hiérarchie* de N équations elles aussi exactes, dont la première relie une fonction d'ordre 1 (à un point) à une fonction d'ordre 2, la seconde équation reliant cette fonction d'ordre 2 à une fonction d'ordre 3 et ainsi de suite jusqu'à l'équation reliant l'ordre N-1 à l'ordre N. Dans le premier cas la hiérarchie d'équations, dite hiérarchie de Klimontovich, s'obtient comme nous allons le voir, en écrivant les équations portant sur les valeurs moyennes d'ensemble de produits des fonctions de Klimontovich à un point. Dans le second cas, cette hiérarchie dite hiérarchie BBGKY (d'après Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) est générée par intégration successive sur position et vitesse de 1,2,...N-1 particules de la fonction complète à N points, afin d'obtenir des fonctions à N-1, N-2...1 particules et les équations gouvernant leur évolution (on pourra pour plus de détail se reporter à l'annexe I). Comme auparavant les équations obtenues sont exactes et intraitables! Mais si l'on peut tronquer à un certain niveau ces hiérarchies, c'est-à-dire relier la

fonction d'un certain ordre (2 ou 3 en pratique) à celles d'ordre inférieur, on obtient alors un système complet (fermé) d'équations. La recherche de ces troncatures ou coupure des hiérarchies, l'étude de leur domaine de validité et la recherche de solutions sont l'objet de branches entières de la physique théorique (théorie des gaz imparfaits, physique des plasmas).

Enfin, dans la limite non collisionnelle, on en tire des équations qui ne tiennent plus compte du caractère discret des particules L'équation de Klimontovich se réduit à l'équation de Vlasov et la hiérarchie de Klimontovich à celle de Vlasov, tout comme d'ailleurs la hiérarchie BBGKY. L'ensemble de ces relations est schématisé en figure II.

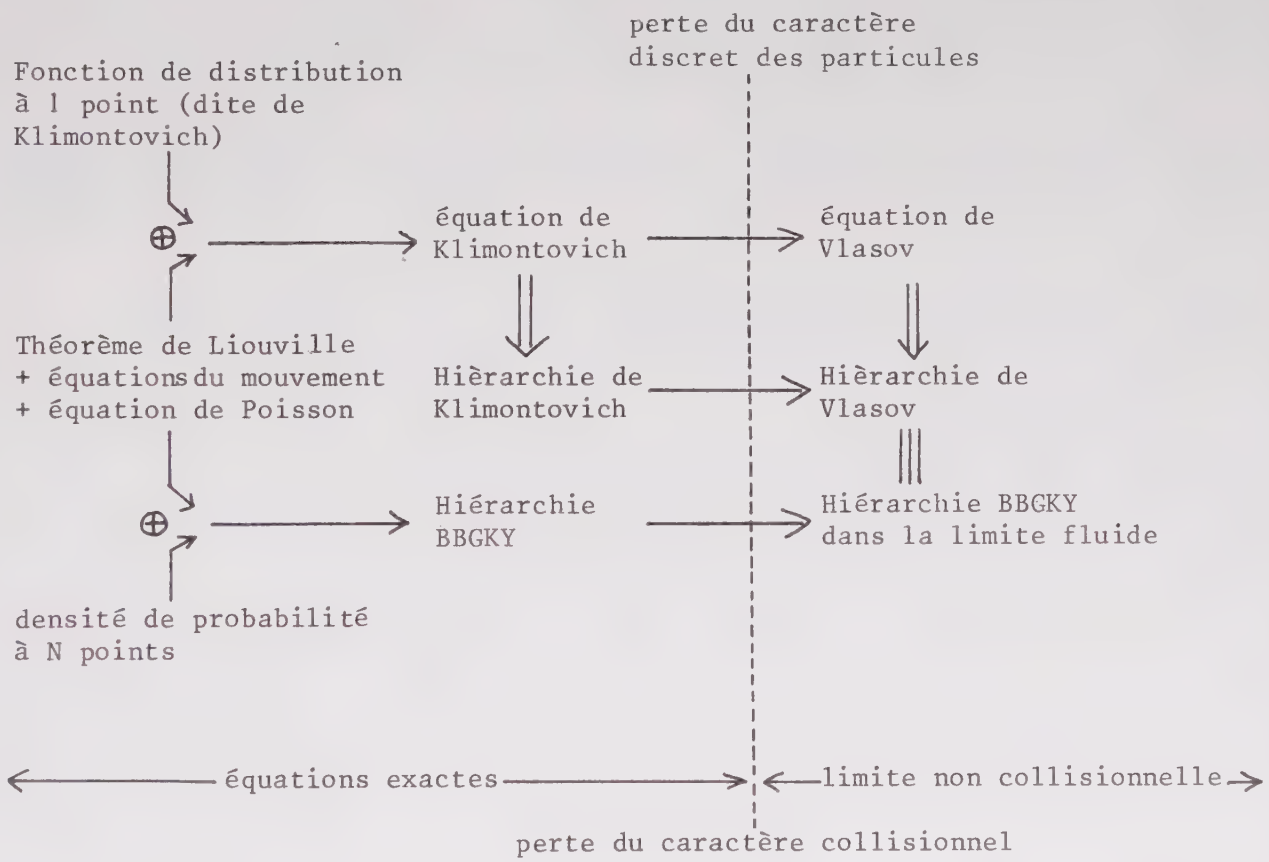


Figure II

La hiérarchie BBGKY et l'équation de Klimontovich sont deux "traductions" différentes du Théorème de Liouville. La hiérarchie de Klimontovich est générée à partir de l'équation du même nom. La hiérarchie de Klimontovich et la hiérarchie BBGKY ont toutes deux pour limite non collisionnelle la hiérarchie de Vlasov qui peut d'ailleurs être obtenue directement à partir de la limite non collisionnelle de l'équation de Klimontovich (i.e. l' équation de Vlasov)

La hièrarchie BBGKY, dans la limite des petites perturbations a été utilisée par un grand nombre d'auteurs (Van Albada 1960, Bisnovatyi et al., 1970, Saslaw, 1972) pour étudier l'évolution linéaire de la distribution des galaxies.

b) Dérivation des hiérarchies de Klimontovich et de Vlasov :

Revenons maintenant à la fonction à 1 point f définie par :

$$dN = f(x, u, \theta)\, d^3x\, d^3u$$

L'équation de conservation s'écrit comme nous l'avons vu :

$$\partial_\theta f + u \partial_x f + \partial_\theta u\, \partial_u f = 0$$

Et l'accélération est donnée par

$$\partial_\theta u = -\nabla \bar{\Phi} \quad , \quad \Delta \bar{\Phi} = 4\pi G a m \int (f(x,u,\theta) - \langle f \rangle)\, d^3u$$

Ce qui permet d'écrire l'équation sous la forme :

$$\partial_\theta f(1) + u \partial_x f(1) + Gam \int d\mu_2 f(2) \frac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \partial_{u_1^k} f(1) = 0 \qquad (1)$$

où l'on a posé

$$x_{21}^k = x_2^k - x_1^k \qquad \text{et} \qquad x_{21} = \| x_2 - x_1 \|$$

Prenons la valeur moyenne d'ensemble (sur plusieurs réalisations) de f, et de produits de f en des points différents. La valeur moyenne de f nous donne la probabilité dP de trouver à l'instant θ une particule en x avec la vitesse u (à dx et du près) et, pour un espace homogène et isotrope on a :

$$dP = \rho(u, \theta)\, d^3x\, d^3u \quad , \quad \rho(u,\theta) = \langle f(x,u,\theta) \rangle$$

avec

$$\int \rho(u,\theta)\, d^3u = \bar{n} a^3 = \text{constante}$$

$\bar{n}a^3$ est la densité comobile de particules, c'est-à-dire qu'avec les notations du paragraphe précédent, si m est la masse d'une particule, on a :

$$m\bar{n} = \bar{d} \quad , \quad \bar{n}a^3 m = \bar{\rho}$$

La valeur moyenne du produit de f en x_o et de f en $x_o + x$ donne elle, accès à la probabilité dP de trouver une particule en x_1 avec une vitesse u_1 et une autre en x_2 avec une vitesse u_2 qui, pour un expace homogène et isotrope, ne peut dépendre que de x_{12}. Ce qui permet d'écrire :

$$d\underline{P} = \rho_{12}(x_{12}, u_1, u_2, \Theta)\, du_1\, du_2 \quad , \quad \rho_{12}(x_{12}, u_1, u_2, \Theta) = \langle f(1) f(2) \rangle$$

et on appelle n_{12} la partie spatiale de ρ_{12} :

$$n_{12} = \int \rho_{12}(x_{12}, u_1, u_2, \Theta)\, d^3u_1\, d^3u_2$$

On peut décomposer, comme au cours de l'étude des catalogues, la densité de probabilité ρ_{12} en deux parties :

$$\rho_{12}(x_{12}, u_1, u_2, \Theta) = \rho(u_1, \Theta)\rho(u_2, \Theta) + C_{12}(x_{12}, u_1, u_2, \Theta)$$

ce qui définit la partie réduite C_{12}

$$C_{12} \equiv C(x_{12}, u_1, u_2, \Theta) = \langle \delta f(1)\, \delta f(2) \rangle \text{ avec } \delta f(1) = f(x_1, u_1, \Theta) - \langle f(x_1, u_1, \Theta) \rangle$$

et $$\int C_{12}\, d^6u = \bar{n}^2 a^6 \xi_{12} \quad , \quad n_{12} = \bar{n}^2 a^6 (1 + \xi_{12})$$

ce qui peut servir à définir ξ de manière équivalente à précédemment.

On a ensuite la probabilité à 3 particules :

$$d\underline{P} = \rho_{123}(x_{12}, x_{23}, x_{31}, u_1, u_2, u_3, \Theta)\, du_1\, du_2\, du_3 \quad , \quad \rho_{123} = \langle f(1) f(2) f(3) \rangle$$

de partie spatiale n_{123} :

$$n_{123} = \int \rho_{123}\, d^9u$$

On peut là encore retrouver ξ_{123} défini au cours de l'étude des catalogues comme l'intégrale de la partie réduite d_{123} de ρ_{123}

$$\rho_{123} = \rho_1 \rho_2 \rho_3 + \rho_1 c_{23} + \rho_2 c_{13} + \rho_3 c_{12} + d_{123}$$

avec

$$d_{123} = d(1,2,3) = \langle \delta f(1)\, \delta f(2)\, \delta f(3) \rangle$$

$$\int d_{123}\, d^3u_1\, d^3u_2 = \bar{n}^3 a^9\, \xi(x_{12}, x_{23}, x_{31}) = \bar{n}^3 a^9\, \xi_{123}$$

et $$n_{123} = \bar{n}^3 a^9 \left(1 + \xi_{12} + \xi_{23} + \xi_{31} + \xi_{123}\right).$$

On peut donc générer ainsi N densités de probabilité de complexité croissante. L'équation d'évolution de la première s'obtient simplement en prenant la moyenne de l'équation (1) ce qui donne :

$$\partial_\theta \rho_1 + 6am\, \partial^k_{u_1} \int d\mu_2\, \frac{x^k_{21}}{x^3_{21}}\, \rho_{12} = 0$$

$$\text{car } \langle u^k \partial_{x^k} f(x,u,\theta) \rangle = u^k \partial_{x^k} \langle f(x,u,\theta) \rangle = 0$$

Pour la seconde on a :

$$\partial_\theta \rho_{12} = \langle f(2)\, \partial_\theta f(1) \rangle + (1/2)$$

$$= -\langle f(2)\, u^k_1 \partial^k_{x_1} f(1) \rangle - 6am \left\langle f(2)\, \partial^k_{u_1} f(1) \int d\mu_3\, \frac{x^k_{31}}{x^3_{31}}\, f(3) \right\rangle + (1/2)$$

où $+(1/2)$ signifie qu'il faut ajouter une expression identique en permutant les indices 1 et 2. D'où :

$$\partial_\theta \rho_{12} + u^k_1 \partial^k_{x_1} \rho_{12} + 6am\, \partial^k_{u_1} \int d\mu_3\, \frac{x^k_{31}}{x^3_{31}}\, \rho_{123} + (1/2) = 0$$

et comme ρ_{12} ne dépend que de x_{12}, on a :

$$u^k_1 \partial^k_{x_1} \rho_{12} + (1/2) = u^k_{12} \partial^k_{x_{12}} \rho_{12}$$

ce qui permet d'écrire

$$\partial_\theta \rho_{12} + u_{12}^k \partial_{x_{12}^k} \rho_{12} + \left[Gam\, \partial_{u_1^k} \int d\mu_3 \frac{x_{31}^k}{x_{31}^3} \rho_{123} + (1/2) \right] = 0$$

qui est la deuxième équation de la hiérarchie (l'échange des indices 1 et 2 ne concerne maintenant que la parenthèse).

Enfin, quand on s'intéresse aux cas où les fonctions de corrélation réduite (ξ, ξ) peuvent être petites devant 1, on décompose alors ρ_{12} et ρ_{123} en fonction de ρ_1, C_{12} et d_{123}. Utilisant la première équation de la hiérarchie pour évaluer les dérivées temporelles de ρ_1 et ρ_2, on peut alors écrire :

$$\partial_\theta C_{12} + u_{12}^k \partial_{x_{12}^k} C_{12} + \left[Gam\, \partial_{u_1^k} \int d\mu_3 \frac{x_{31}^k}{x_{31}^3} (d_{123} + \rho_1 C_{23}) + (1/2) \right] = 0$$

On pourrait d'ailleurs appliquer une réduction similaire à la troisième équation de la hiérarchie qui a la forme générale suivante avant réduction :

$$\partial_\theta \rho_{123} + \sum_{i=1}^{3} \left(u_i^k \partial_{x_i^k} \rho_{123} + \partial_{u_i^k} F^k \right) = 0$$

où le terme F^k fait référence à la somme des interactions que subissent les particules. Mais nous ne nous intéressons dans la suite qu'au domaine *non-linéaire* (ξ et $\xi > 1$, où ce type de décomposition explicite en partie réduite n'est pas utile. En conclusion, les premières équations de la hiérarchie qu'il va falloir tronquer pour résoudre (cf. Chapitre III) s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_\theta \rho_1 + Gam \int d\mu_2 \dfrac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \partial_{u_1^k} \rho_{12} = 0 \\ \partial_\theta \rho_{12} + u_{12}^k \partial_{x_{12}^k} \rho_{12} + \left[Gam\, \partial_{u_1^k} \int d\mu_3 \dfrac{x_{31}^k}{x_{31}^3} \rho_{123} + (1/2) \right] = 0 \\ \partial_\theta \rho_{123} + \sum_{i=1}^{3} \left(u_i^k \partial_{x_i^k} \rho_{123} + \partial_{u_i^k} F^k \right) = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

c) Equations exactes - limite non-collisionnelle

Dans la dérivation précédente de la hiérarchie d'équation, nous n'avons nulle part utilisé la forme précise de f. Il faut maintenant distinguer deux cas :

- la fonction $f(x,u,\Theta)$ de départ est la fonction de Klimontovich (singulière). La hiérarchie est alors une hiérarchie exacte (dite de Klimontovich) dont la classe des solutions ne doit pas être restreinte aux fonctions de carré sommable. C'est le caractère singulier de f qui permet de rendre compte du caractère discret des particules.

- la fonction $f(x,u,\Theta)$ est une fonction régulière. La densité et le potentiel sont des fonctions continues, et la classe de solutions est plus restreinte. On ne prend donc en compte qu'un *champ moyen* (pas d'interactions binaires). L'équation (1) est alors l'équation de Vlasov, et la hiérarchie générée prend alors le nom de Hiérarchie de Vlasov*. Les corrélations apparaissent via les fluctuations de $f(x,u,\Theta)$. C'est dans ce cadre que nous nous placerons dans toute la suite.

Comme le fit remarquer, dans un contexte astrophysique, Inagaki en 1976, la hiérarchie de Vlasov est identique à la limite fluide de la hiérarchie BBGKY ($\bar{n} \to \infty$, $m \to 0$, $\bar{n}m$ = constante, c'est-à-dire, là aussi, perte du caractère discret des particules). C'est cette limite qui a été utilisée par Davis et Peebles (1977). Ils ont d'ailleurs proposé une dérivation quelque peu différente formellement de la dérivation standard (issue de la théorie des gaz imparfaits) proposée en Annexe I. Leur dérivation est exposé en détail dans le livre de P.J.E. Peebles "Large Scale Structure of the Universe" (p 259).

---

*On peut évidemment l'obtenir aussi en séparant dans la hiérarchie de Klimontovich les termes réguliers et les termes singuliers. Par exemple la valeur moyenne du produit de deux fonctions de Klimontovich fait apparaître explicitement un terme régulier et un $\delta(x-y)$. Les termes réguliers reproduisent la hiérarchie de Vlasov et les termes singuliers sont négligeables dans la limite $n d_J^3 \to \infty$

Au cours de l'approche analytique du chapitre III, c'est la *hiérarchie* de Vlasov que nous allons étudier, car elle traite directement des fonctions de corrélation. Par contre, dans la partie Numérique, l'évolution de la simulation est décrite par *l'équation* de Vlasov, les trajectoires des particules étant simplement les caractéristiques de cette équation. Les fonctions de de corrélation numériques seront alors générées comme elles l'ont été pour établir la hiérarchie, c'est-à-dire en prenant la valeur moyenne des produits de fluctuations de densité $f(x,u,\Theta)$ en des points différents.

d) Moments de vitesse de l'équation de Vlasov

Une méthode classique quand on a une équation cinétique (Vlasov, Boltzmann, Fokker-Planck) portant sur une fonction de distribution à 1 point $f(x,u,\Theta)$ consiste à en prendre différents moments de vitesse pour obtenir les équations hydrodynamiques portant sur les variables macroscopiques habituelles, puis à tronquer la hiérarchie obtenue à un certain niveau. C'est ce que nous allons faire dans la suite, mais en l'appliquant à l'équation d'évolution de la fonction à deux points ς_{12}. Auparavant, nous allons illustrer cette démarche dans le cas de l'équation de Vlasov pour un univers en expansion :

$$\left(\partial_\Theta + u^i \partial_{x^i} - \partial_{x^i}\bar{\Phi}\,\partial_{u^i}\right) f(x,u,\Theta) = 0 \,, \quad \Delta\bar{\Phi} = 4\pi G a(\rho - \bar{\rho}) \,, \quad \rho(x,\Theta) = m\int f(x,u,\Theta)\, d^3u$$

ce qui va aussi nous permettre de mettre en évidence les quantités qu'une simulation numérique de cette équation doit (ou devrait) conserver. Définissant les quantités macroscopiques locales habituelles par :

$$\rho(x,\Theta) = m\int f(x,u,\Theta)\, d^3u \qquad \text{(densité de masse locale)}$$

et appelant n la densité numérique, $n = \frac{\rho}{m}$, on a :

- $\bar{u}^i(x,\Theta) = m\int u^i f\, d^3u$ (vitesse locale du fluide)
- $P^{ij}(x,\Theta) = m\int (u-\bar{u})^i (u-\bar{u})^j f\, d^3u$ (tension de pression)
- $Q^i(x,\Theta) = \frac{m}{2}\int (u-\bar{u})^2 (u-\bar{u})^i f\, d^3u$ (vecteur flux de chaleur obtenu par contraction du tenseur de contrainte visqueux).

(avec évidemment Trace P = 3nkT, où T est la température cinétique)

puis multipliant successivement l'équation par 1, u^i, u^2 et en intégrant sur les vitesses, on obtient (après quelques simplifications pour faire apparaître les quantités centrées par rapport à $\bar{u}$) les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_\theta \rho + \partial_{x^i}(\rho \bar{u}^i) = 0 \\ \left(\partial_\theta + \bar{u}^j \partial_{x^j}\right) \bar{u}^i = -\frac{1}{m}\partial_{x^i}\bar{\Phi} - \frac{1}{\rho}\partial_{x^j}\underline{P}^{ij} \\ \left(\partial_\theta + \bar{u}^j \partial_{x^j}\right)\left(\frac{3}{2}nkT\right) = -\partial_{x^i} q^i - \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\underline{P}\,\partial_{x^i}\bar{u}^i - \partial_{x^j}\bar{u}^i \underline{P}^{ij} \end{cases}$$

qui sont les équations d'évolution classiques d'un fluide (conservation de la masse, équation du mouvement et évolution de la température d'un élément fluide). On voit immédiatement que chaque moment de vitesse est relié au moment de vitesse d'ordre supérieur et qu'on obtient, là encore, une hiérarchie d'équations qu'il faut tronquer à un certain niveau pour obtenir un système fermé d'équations.

Une simulation numérique ayant nécessairement lieu dans une "boîte" d'extension finie, on simule un volume infini par des conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire que la densité, le potentiel (et le champ ont des valeurs identiques aux "bords" en regard et que toute particule qui sort d'un côté rentre par le côté opposé avec la même impulsion. L'intégrale sur tout le volume de la boîte de la première équation :

$$\partial_\theta \int \rho(x,\theta)\, d^3x = \partial_\theta(\bar{\rho} V) = 0$$

traduit la conservation du nombre de particules (nombre d'entrantes = nombres de sortantes(!)). Appelant $\mathcal{P}$ l'impulsion du centre de masse on a :

$$\mathcal{P}^i(\theta) = \int \rho(x,\theta)\, \bar{u}^i(x,\theta)\, d^3x$$

$$\partial_\theta \mathcal{P}^i + \int \left[\partial_{x^j}\left(\rho \bar{u}^i \bar{u}^j + \underline{P}^{ij}\right) - \rho\, \partial_{x^i}\bar{\Phi}\right] d^3x = 0$$

or $\Delta\bar{\Phi} = 4\pi G a(\rho - \bar{\rho})$

$$\Rightarrow \rho\,\partial_{x^i}\bar{\Phi} = \left(\frac{\Delta\bar{\Phi}}{4\pi G a} + \bar{\rho}\right)\partial_{x^i}\bar{\Phi} = \partial_{x^i}\left[\bar{\rho}\bar{\Phi} + \frac{\partial_{x^j}\bar{\Phi}\,\partial_{x^j}\bar{\Phi}}{8\pi G a}\right]$$

on a donc la conservation de l'impulsion totale pour des conditions aux limites périodiques :

$$\partial_\theta \mathcal{G}^i(x,\theta) = 0$$

Enfin, pour la conservation de l'énergie, reprenons directement l'équation obtenue par multiplication par mu^2 et intégration, avant transformation :

$$\partial_\theta m\int u^2 f\,d^3u = \int mu^2\,\partial_{u^i} f\,\partial_{x^i}\bar{\Phi}\,d^3u$$

qui se réécrit, en posant $E_c = \frac{m}{2}\int u^2 f\,d^3u\,d^3x$, $U = \frac{1}{2}\int(\rho-\bar{\rho})\bar{\Phi}\,d^3x$

et en intégrant sur le volume de la boîte :

$$\partial_\theta E_c = -m\int u^i f\,\partial_{x^i}\bar{\Phi}\,d^3u\,d^3x = \int \bar{\Phi}\,\partial_{x^i}(\rho\bar{u})\,d^3x$$

$$\partial_\theta E_c = -\int\bar{\Phi}\,\partial_\theta(\rho-\bar{\rho})\,d^3x = +\int G a m\,\frac{(\rho(x')-\bar{\rho})}{|x'-x|}\,\partial_\theta(\rho(x)-\bar{\rho})\,d^3x\,d^3x'$$

$$\partial_\theta E_c = -\partial_\theta U + \frac{\partial_\theta a}{a}U$$

et posant $h(\theta) = \frac{\partial_\theta a}{a}$, on a finalement :

$$\partial_\theta(E_c + U) = h(\theta)U$$

On voit apparaître par rapport à l'équation de conservation de l'énergie habituelle une énergie "d'expansion" hU qui vient simplement du fait que pour obtenir les équations du mouvement dans un univers en expansion, il faut non seulement faire la transformation ($r \to x$), $\dot{r} \to u$, $t \to \theta$, $d \to \rho - \bar{\rho}$ mais il faut aussi remplacer G par $Ga(\theta)$.

En conclusion, en prenant les moments de vitesse successifs d'une équation cinétique,on génère une hiérarchie d'équations équivalente à l'équation originelle, mais portant sur des quantités "macroscopiques" qui permettent une troncature différente. L'intégration sur l'espace de ces équations donne les relations de conservation. Dans le cas d'une simulation non collisionnelle d'un Univers en expansion avec des conditions aux limites périodiques, on en déduit la conservation du nombre de particules, de la quantité de mouvement totale, et la variation de l'énergie en fonction de l'expansion.

CHAPITRE III

APPROCHE ANALYTIQUE

CHAPITRE III

APPROCHE ANALYTIQUE

Dans ce chapitre, nous allons emprunter initialement la même démarche que Davis et Peebles (1977). C'est-à-dire que nous allons utiliser la méthode des *moments de vitesse* (§ 1), et *tronquer* la hiérarchie obtenue de manière essentiellement équivalente à la leur, quoique avec des hypothèses *moins* contraignantes (§ 2). On retrouvera donc les résultats asymptotiques qu'ils obtiennent en postulant une solution self-similaire, ce qui les contraint à prendre $\Omega = 1$ (§ 3). Cependant, le choix de coordonnées que nous avons décidé d'utiliser, la définition de quantités différentes et donc la façon de mener les calculs permettent de mettre les équations, *avant même toute troncature*, sous une forme extrêmement simplifiée. Le passage en coordonnées lagrangiennes permet de mettre clairement en évidence les quantités conservées dans la limite des courtes distances. De plus, ce formalisme se prête bien à un développement perturbatif pour calculer *analytiquement* les corrections aux solutions asymptotiques, dans le cadre des hypothèses retenues pour tronquer la hiérarchie, et *quel que soit* Ω.

1) Moments de vitesse de la deuxième équation de la hiérarchie de Vlasov

a) Motivation

Dans le cadre d'un univers homogène et isotrope, la densité moyenne $\bar{n}$ est évidemment constante spatialement ($\delta \bar{n} = 0$) et la vitesse moyenne propre (hors flot de Hubble) est nulle. Les moments de vitesse de la première équation de la hiérarchie n'ont donc guère d'intérêt. Par contre, ceux de la fonction de corrélation complète $\varsigma(1,2)$ correspondent

à des quantités observables. En effet, bien qu'on ne puisse espérer mesurer ς_{12} (ou sa partie réduite c_{12}), qui contient toute l'information sur les positions *et* les vitesses des paires, on peut comme nous l'avons vu mesurer le nombre de paires $n_{12} \equiv n(x_1, x_2)$ séparées par une distance x_{12} ($n_{12} = \int \varsigma_{12} d^3u_1 d^3u_2 = \bar{n}^2 a^6 (1+\xi_{12})$), où, formulé autrement, le nombre moyen de particules en x_2, *à conditions* qu'il y en ait une en x_1 ($n(2/1) = \bar{n} a^3 (1+\xi_{12})$, $\frac{\delta n(2/1)}{\bar{n}a^3} = \xi_{12}$). La vitesse relative moyenne $< v_{21} >$ c'est-à-dire la vitesse de la particule 2 dans le repère de la particule 1 ($\langle v(2/1) \rangle \equiv \langle v_{21} \rangle = \frac{u(ax_{12})}{a}$) n'est pas nulle non plus, et les catalogues complets en décalage vers le rouge permettent d'évaluer la dispersion de cette différence de vitesse propre (tout du moins en fonction de leur distance projetée $\sigma(rp)$

Nous allons donc prendre les moments de vitesse de la seconde équation de la hiérarchie portant sur ς_{12} (qui peut être interprétée comme une probabilité conditionnelle) :

$$\partial_\theta \varsigma_{12} + u^k_{12} \partial_{x^k_{12}} \varsigma_{12} + \left[Gma \, \partial_{u^k_1} \int du_3 \frac{x^k_{31}}{x^3_{31}} \varsigma_{123} + (1/2) \right] = 0$$

Et afin de chercher l'analogue des équations hydrodynamiques introduites au chapitre précédent, les moments de vitesse que nous définirons seront "centrés" par rapport à la vitesse moyenne $\bar{u}_{12}$.

b) Dérivation des équations :

Moment d'ordre 0 :

Ce moment est simplement obtenue en intégrant sur les vitesses u_1 et u_2 :

$$\partial_\theta n_{12} + \partial_{x^k_{12}} \int d^6u \, u^k_{12} \varsigma_{12} = 0 \, , \quad n_{12} = \int \varsigma_{12} d^6u = \bar{n}^2 a^6 (1+\xi_{12})$$

La vitesse moyenne a pour définition :

$$\bar{u}^k_{12} = \langle u^k_{12} \rangle = \frac{1}{n_{12}} \int d^6u \, u^i_{12} \varsigma_{12}$$

et elle est évidemment portée par le vecteur liant les deux particules :

$$\bar{u}^k_{12} = \bar{u}_{12} \frac{x^k_{12}}{x_{12}}$$

Pratiquement toutes les quantités qui vont apparaître dans la suite sont indicées par 1 et 2. Afin d'allèger l'écriture nous allons convenir de ne pas noter ces indices sauf dans les termes sources où les corrélations à 3 points pourraient être sources de confusion. Dorénavant, on aura donc :

$$n \equiv n_{12}(x_{12}) = \bar{n}^2 a^6 (1+\xi_{12})$$

$$\bar{u} \equiv \bar{u}_{12}(x_{12}) \quad , \quad x \equiv x_{12} \qquad \text{et donc}$$

$$\int d^6u \, u^k_{12} \rho_{12} = n\bar{u} \frac{x^k}{x}$$

Avec ces conventions, et compte tenu du fait que $\bar{u}$ et n ne dépendent que de x, l'équation de moment se réécrit sous la forme :

$$\partial_\theta (nx^2) + \partial_x (nx^2 \bar{u}) = 0$$

ce qui traduit simplement la conservation des paires de particules, ce qu'on voit aisément en intégrant sur une portion de l'espace l'équation multipliée par $4\pi/\bar{n}a^3$:

$$\partial_\theta \left[\int_0^{x_0} \bar{n}a^3 (1+\xi) 4\pi x^2 dx \right] + 4\pi x_0^2 \bar{n}a^3 (1+\xi)\bar{u} = 0$$

Le premier terme donne le nombre moyen de voisins d'une particule donnée dans une sphère de rayon comobile x_0, et le second, le flux sortant de

ces voisins*.

Moment d'ordre 1 :

Multipliant cette fois-ci l'équation sur ρ_{12} par u_{12}^i avant l'intégration sur les vitesses, on obtient :

$$\partial_\theta(n\bar{u}\frac{x^i}{x}) + \partial_{x^k}\int d^6u\, u_{12}^i\, u_{12}^k\, \rho_{12} = \frac{x^i}{x} S_o$$

$$S_o = S_o(x,\theta) = Gma\,\frac{x_{12}^i}{x_{12}}\int d^3x_3\, d^9u\, u_{12}^i\, \frac{x_{31}^k}{x_{31}}\, \partial_{u_1^k}\rho_{123} - (1/2)^{**}$$

L'espace étant homogène et isotrope, les quantités décrivant un système de deux particules ne peuvent dépendre que de *deux* grandeurs indépendantes, l'une correspondant à la direction joignant les particules (composante "parallèle"), l'autre correspondant aux axes pris dans le plan perpendiculaire (composante "orthogonale"). Entre autre le tenseur de "Température"*** peut se mettre sous la forme (Voir Annexe III) :

$$T^{ij} = \int \frac{d^6u}{n_{12}} (u_{12}-\bar{u}_{12})^i (u_{12}-\bar{u})^j \rho_{12} = T_\perp \delta^{ij} + (T_{//} - T_\perp)\frac{x^i x^j}{x^2}$$

Exprimant alors le deuxième terme de l'équation en fonction des moments centrés $T_{//}$ et $T_\perp$ et du moment d'ordre inférieur, on a :

$$\partial_{x_{12}^k}\int d^6u\, u_{12}^i\, u_{12}^k\, \rho_{12} = \partial_{x^k}\left[n T_\perp \delta^{ik} + n(T_{//} + \bar{u}^2 - T_\perp)\frac{x^i x^j}{x^2}\right]$$

$$= \frac{x^i}{x}\left[\partial_x(nT_\perp) + \partial_x\left(n(T_{//}+\bar{u}^2-T_\perp)\right) + \frac{2n}{x}(T_{//}+\bar{u}^2-T_\perp)\right]$$

---

*la forme de l'équation de conservation est évidemment identique en coordonnées non-comobiles, puisqu'on a : r = ax, $\bar{v}$ = a$\bar{u}$, ce qui permet d'écrire :

$$\partial_\theta \int_0^{r_o} \bar{n}(1+\xi) 4\pi r^2 dr + 4\pi r_o^2 \bar{n}(1+\xi)\bar{v} = 0$$

**le signe - vient du facteur de projection x_{12}^i.

***l'analogue exacte de la température cinétique habituelle devrait inclure la masse des particules considérées.

et en reportant dans l'équation :

$$\partial_\theta(n\bar{u}) + \partial_x\left[n(T_{//} + \bar{u}^2)\right] + \frac{2n}{x}\left(T_{//} + \bar{u}^2 - T_\perp\right) = S_o$$

ce qui s'écrit encore :

$$\partial_\theta(nx^2\bar{u}) + \partial_x\left[nx^2(T_{//} + \bar{u}^2)\right] - 2nxT_\perp = S_o x^2$$

Tirant du moment d'ordre zéro l'égalité suivante :

$$\partial_\theta(nx^2\bar{u}) + \partial_x(nx^2\bar{u}^2) = nx^2(\partial_\theta + \bar{u}\partial_x)\bar{u}$$

on peut écrire l'équation du mouvement (relatif) d'une paire :

$$(\partial_\theta + \bar{u}\partial_x)\bar{u} = \frac{1}{nx^2}\left[S_o x^2 + 2nxT_\perp - \partial_x(nx^2T_{//})\right]$$

une intégration par partie permettant de réécrire S_o sous la forme :

$$S_o(x,\theta) = Gam\,\frac{x^i}{x}\int d^3x_3\,\frac{x^i_{31}}{x^3_{31}}\,n_{123} - (1/2) \qquad \left(n_{123} = \int d^9u\,\rho_{123}\right)$$

Moment d'ordre 2

La multiplication par $u^i_{12}\,u^j_{12}$ de la deuxième équation de la hiérarchie de Vlasov, suivie de l'intégration sur les vitesses donne ensuite l'évolution du tenseur de température. Cette équation doit pouvoir, *a priori* se scinder en deux équations sur les composantes indépendantes $T_{//}$ et $T_\perp$.
On a :

$$\partial_\theta\left[nT_\perp\delta^{ij} + n(T_{//} + \bar{u}^2 - T_\perp)\frac{x^ix^j}{x^2}\right] + \partial_{x^k}\int u^i_{12}u^j_{12}u^k_{12}\rho_{12}\,d^6u = S_\perp\delta^{ij} + (S_{//} - S_\perp)\frac{x^ix^j}{x^2}$$

$$S_\perp(x,\theta)\delta^{ij} + (S_{//}(x,\theta) - S_\perp(x,\theta))\frac{x^ix^j}{x^2} = -Gam\int d^9u\,d^3x_3\,\frac{x^k_{31}}{x^3_{31}}\,u^i_{12}u^j_{12}\partial_{u^k_1}\rho_{123} + (1/2)$$

le terme source, qu'on a séparé en composantes indépendantes, peut comme précédemment être réduit par une intégration par partie :

$$S_\perp \delta^{ij} + (S_{//} - S_\perp)\frac{x^i x^j}{x^2} = 2\,Gam \int d^9u\, d^3x_3 \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3} u_{12}^i \rho_{123} + (1/2)$$

Maintenant, on cherche à exprimer le deuxième terme de l'équation sur la température en fonction de quantités centrées, donc du "flux de chaleur" Q^{ijk} et des moments d'ordre inférieur $T_\perp$, $T_{//}$ et $\bar{u}^2$.
Pour les mêmes raisons de symétrie qu'auparavant Q^{ijk} ne dépend que de deux grandeurs indépendantes (Voir Annexe II) et on peut écrire :

$$\int u_{12}^i u_{12}^j u_{12}^k \rho_{12}\, d^6u = n Q^{ijk} + n\bar{u}\left[T_\perp \frac{\delta^{ij}x^k + \delta^{ik}x^j + \delta^{jk}x^i}{x} + 3(T_{//} - T_\perp)\frac{x^i x^j x^k}{x^3}\right] + n\bar{u}^3 \frac{x^i x^j x^k}{x^3}$$

en notant :

$$Q^{ijk} = \int (u_{12} - \bar{u})^i (u_{12} - \bar{u})^j (u_{12} - \bar{u})^k \rho_{12} \frac{d^6u}{n_{12}}$$

qui est tel que :

$$Q^{ijk} = Q_\perp \frac{\delta^{ij}x^k + \delta^{ik}x^j + \delta^{jk}x^i}{x} + (Q_{//} - Q_\perp)\frac{x^i x^j x^k}{x^3}$$

On peut (Voir Annexe III) mettre le deuxième terme sous la forme :

$$\partial_{x_{12}^k} \int u_{12}^i u_{12}^j u_{12}^k \rho_{12}\, d^6u = F\delta^{ij} + (H - F)\frac{x^i x^j}{x^2}$$

avec

$$F(x,\theta) = \frac{1}{x^4}\partial_x\left[nx^4(Q_\perp + \bar{u}T_\perp)\right]$$

$$H(x,\theta) = \frac{1}{x^2}\partial_x\left[nx^2(Q_{//} + 3\bar{u}T_{//})\right] + 2\partial_x(nQ_\perp) - \frac{4n}{x}\bar{u}T_\perp + \frac{1}{x^2}\partial_x\left(nx^2\bar{u}^3\right)$$

ce qui permet donc de séparer le moment d'ordre 2 en deux équations :

$$-\partial_\theta(nx^4T_\perp)+\partial_x(nx^4T_\perp)=x^4S_\perp-\partial_x(nx^4Q_\perp) \qquad (1)$$

$$\partial_\theta\left[nx^2(T_{//}+\bar{u}^2)\right]+3\partial_x(nx^2\bar{u}T_{//})-4nx\bar{u}T_\perp=x^2S_{//}-\partial_x(nx^2Q_{//}) \qquad (2)$$
$$-2x^2\partial_x(nQ_\perp)-\partial_x(nx^2\bar{u}^3)$$

Utilisant le moment d'ordre 0 pour écrire l'égalité :

$$\partial_x(nx\bar{u}T_\perp)=nx^2\bar{u}\partial_x(x^2T_\perp)-x^2T_\perp\partial_\theta(nx^2)$$

on peut alors reformuler l'équation (1) comme suit :

$$(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x)(x^2T_\perp)=\frac{x^2}{n}\left[S_\perp-\frac{1}{x^4}\partial_x(nx^4Q_\perp)\right]$$

Pour éliminer le $T_\perp$ qui apparaît dans l'équation (2) on utilise le moment d'ordre 1 écrit sous la forme :

$$4nx\bar{u}T_\perp=2nx^2\bar{u}(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x)\bar{u}-2S_0x^2+2\bar{u}\partial_x(nx^2T_{//})$$

et l'on remplace dans (2) :

$$\partial_\theta(nx^2T_{//})+3\partial_x(nx^2\bar{u}T_{//})-2\bar{u}\partial_x(nx^2T_{//})=$$

$$x^2\left[S_{//}-2S_0\bar{u}-\frac{1}{x^2}\partial_x(nx^2Q_{//})-2\partial_x(nQ_\perp)\right]-\partial_x(nx^2\bar{u}^3)-\partial_\theta(nx^2\bar{u}^2)+2nx^2\bar{u}(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x)\bar{u}$$

La somme des trois derniers termes du membre de droite (utilisant le moment d'ordre 0) étant nulle, on a pour (2) :

$$(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x)(nx^2T_{//})+3nx^2T_{//}\partial_x\bar{u}=x^2\left[S_{//}-2S_0\bar{u}-\frac{1}{x^2}\partial_x(nx^2Q_{//})-2\partial_x(nQ_\perp)\right]$$

enfin, on réutilise le moment d'ordre 0 pour évaluer $\partial_x\bar{u}$:

$$\partial_x\bar{u}=\partial_x\left(\frac{nx^2\bar{u}}{nx^2}\right)=-\frac{\partial_\theta(nx^2)+\bar{u}\partial_x(nx^2)}{nx^2}$$

On a donc :

$$\left(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x\right)\left(nx^2T_{//}\right)-3T_{//}\left(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x\right)\left(nx^2\right)=x^2\left[S_{//}-2S_0\bar{u}-\frac{1}{x^2}\partial_x\left(nx^2Q_{//}\right)-2\partial_x\left(nQ_\perp\right)\right]$$

D'où l'équation d'évolution de la température parallèle :

$$\left(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x\right)\left(\frac{T_{//}}{n^2x^4}\right)=\frac{x^2}{n^3x^4}\left[S_{//}-2S_0\bar{u}-\frac{1}{x^2}\partial_x\left(nx^2Q_{//}\right)-2\partial_x\left(nQ_\perp\right)\right]$$

En résumé, les équations *non-collisionnelles* pour un univers en expansion peuvent être mises sous la forme simple suivante :

$$\begin{cases}\partial_\theta\left(nx^2\right)+\partial_x\left(nx^2\bar{u}\right)=0\\ \left(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x\right)\bar{u} &= \frac{1}{nx^2}\left[S_0x^2+2nxT_\perp-\partial_x\left(nx^2T_{//}\right)\right]\\ \left(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x\right)\left(x^2T_\perp\right) &= \frac{x^2}{n}\left[S_\perp-\frac{1}{x^4}\partial_x\left(nx^4Q_\perp\right)\right]\\ \left(\partial_\theta+\bar{u}\partial_x\right)\left(\frac{T_{//}}{n^2x^4}\right) &= \frac{1}{n^3x^4}\left[S_{//}-2S_0\bar{u}-\frac{1}{x^2}\partial_x\left(nx^2Q_{//}\right)-2\partial_x\left(nQ_\perp\right)\right]\end{cases}$$

c) Passage en variables lagrangiennes

La signification physique des équations obtenues, ainsi que la forme qui en découle, suggère de passer du point de vue Eulérien utilisé jusqu'ici à un point de vue lagrangien. Ces équations sont celles d'un fluide unidimensionnel de densité nx^2 de vitesse $\bar{u}$, et caractérisé par deux quantités, les températures $T_{//}$ et $T_\perp$. Ces quatre quantités *locales* dépendent de la position x de l' élément fluide et de l'instant considéré On décide maintenant de décrire ce fluide par l'évolution des quantités qui caractérisent un élément de ce fluide le long de la trajectoire de l'élément. On passe donc des variables (x,θ) aux variables $(x_0(x,\theta),\theta')$ définies par :

$$\begin{cases} \theta' \equiv \theta \\ X_0(X,\theta) = X - \int_{\theta_0}^{\theta} \bar{u}(X,\theta)\,d\theta \end{cases}$$

c'est-à-dire que cet élément fluide est caractérisé par sa position initiale x_0 au temps θ_0 et par le temps écoulé depuis. D'après la définition précédente, on a :

$$\frac{\partial X_0}{\partial \theta'} = 0 = \frac{\partial X}{\partial \theta'} - u \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} d\theta' = d\theta + \bar{u}\,dX \\ dX_0 = \dfrac{\partial X}{\partial X_0}\,dX \end{cases}$$

Omettant maintenant les ' puisque tout signe de confusion a disparu, on écrit finalement les équations sous la forme extrêmement simple :

$$\begin{cases} \partial_\theta\left(n X^2 \dfrac{\partial X}{\partial X_0}\right) = 0 \\ \partial_\theta(\bar{u}) = \dfrac{1}{n X^2}\left[S_0 X^2 + 2nX T_\perp - \partial_X(n X^2 T_{/\!/})\right] \\ \partial_\theta(X^2 T_\perp) = \dfrac{X^2}{n}\left[S_\perp - \dfrac{1}{X^4}\partial_X(n X^4 Q_\perp)\right] \\ \partial_\theta\left(\dfrac{T_{/\!/}}{n^2 X^4}\right) = \dfrac{1}{n^3 X^4}\left[S_{/\!/} - 2S_0\bar{u} - \dfrac{1}{X^2}\partial_X(n X^2 Q_{/\!/}) - 2\partial_X(nQ_\perp)\right] \end{cases}$$

avec les termes sources :

$$\begin{cases} S_0(X,\theta) = 6am \int d^3X_3 \dfrac{X_{31}^i}{X_{31}^3} n_{123} + (1/2) \\ S_\perp \delta^{ij} + (S_{/\!/} - S_\perp)\dfrac{x^i x^j}{x^2} = 2\,6am \int d^9u\, d^3X_3 \dfrac{X_{31}^j}{X_{31}^3} u_{12}^i \rho_{123} + (1/2) \end{cases}$$

chacune de ces équations relie un moment de vitesse de ρ_{12} à un moment

d'ordre supérieur* et à des termes sources faisant intervenir les corrélations à 3 points. Cette hiérarchie d'équations de moments n'est donc pas fermée à double titre, puisqu'elle a été générée à partir d'une équation faisant elle-même partie d'une autre hiérarchie, celle de Vlasov. Pour résoudre, il va falloir faire deux types d'hypothèses de coupure, afin d'évaluer les champs gravitationnels des deux premiers moments des corrélations à 3 points

$$\int d^3x_3 \, \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} \, n_{123} \qquad \text{et} \qquad \int d^3x_3 \, \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3} \int d^3u \, u_{12}^i \, \rho_{123}$$

d'une part, et d'autre part pour exprimer le moment d'ordre le plus élevé ($Q_{//}$ et $Q_{\perp}$) en fonction des moments d'ordre inférieur, afin d'obtenir un système d'équations fermé.

2) Hypothèses de fermeture des équations

a) Décomposition des corrélations spatiales à 3 points

Les corrélations spatiales à 3 points apparaissent directement comme source du champ gravitationnel dans le terme $S_o(x,\Theta)$ qui dicte, avec les termes de température l'évolution de la vitesse moyenne $\bar{u}$ dans l'équation de moment d'ordre un. Comme nous l'avons vu au chapitre I, les résultats observationnels sont compatibles avec une décomposition de la fonction de corrélation spatiale réduite à 3 points de la forme :

$$\zeta_{123} = Q \left[\xi_{12}\xi_{23} + \xi_{23}\xi_{31} + \xi_{31}\xi_{12} \right]$$

Remarquons tout d'abord qu'une coupure de ce type, bien que n'étant pas évidente a priori pour une fonction à 3 points est cependant relativement naturelle pour des galaxies. En effet nous avons vu au chapitre II que les galaxies étaient essentiellement des objets non

---

*le "flux de chaleur" détermine l'évolution de la "Température" qui dirige celle de la "vitesse", celle-ci déterminant à son tour la "densité" nx^2, toutes ces quantités étant monodimensionnelles.

collisionnels. Dans ce cas la probabilité $\frac{n}{\bar{n}a^3} = \bar{n}a^3\,\xi(x)\,d^3x$ (aux courtes distances, $\xi \gg 1$) de trouver une galaxie appelée 2 à la distance x d'une galaxie appelée 1 n'est pas le résultat de l'interaction directe entre ces deux galaxies, où de celles de 2 avec les autres voisines de 1. La corrélation s'instaure de manière plus subtile entre 1 et 2 et le processus, comme tout autre processus autoconsistant, est difficile à décrire. Supposons qu'on place la galaxie 1 en un point donné. Sa présence implique un déplacement général de toutes ces voisines qui sont attirées et c'est le champ *global* qui en résulte qui dicte l'évolution ultérieure. En particulier, la galaxie 2 ne doit son évolution *ni* à son interaction directe avec 1 (on pourrait "couper", une fois créé le champ moyen, le champ de 1 sans changer l'évolution de 2 et donc la construction de la corrélation de 2 avec 1) *ni* à ses interactions binaires avec les galaxies 3 ou 4. Réciproquement, la corrélation de 3 avec 1 va être indépendante de 2 en tant qu'individualité. Il semble donc logique que la probabilité de trouver une galaxie (2) à une distance x_1 et une autre (3) à une distance x_2 d'une galaxie 1 donnée soit simplement donnée par le produit des probabilités (probabilités indépendantes) ce qui conduit naturellement à une dépendance de $\mathcal{N}_{123}$ proportionnelle à $\bar{n}^{-3}\,a^9\,\xi(x_1)\,\xi(x_2)$ avec un coefficient de l'ordre de 1, la probabilité de trouver une galaxie en un point étant simplement proportionnelle à $\bar{n}a^3$. Enfin, "les galaxies étant indiscernables", il convient bien sûr de symétriser cette expression ce qui conduit bien à la dépendance observée en ξ^2. De plus, ce type d'arguments conduit naturellement à proposer une décomposition des corrélations à 4 points en triple produit symétrisé de ξ, ce qui est, nous l'avons vu, compatible avec les observations.

Remarquons par ailleurs que les observations ne nous disent rien de plus précis que l'argument ci-dessus. En effet nous avons vu que la détermination de ξ n'était pas sans ambigüité : la précision des résultats actuels dans le domaine où $\xi \sim 1$ ne peut interdire des déviations raisonnable au comportement en loi de puissance. En particulier, des fonctions de corrélations ne s'en distinguant que par l'addition d'une constante (spatiale) $\xi_1 \lesssim 1$ telle que : $\xi(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\gamma} + \xi_1$ (dans le domaine $\xi > 1$) ne semblent pas pouvoir être écartées au niveau actuel des observations, ce qui explique que nous ayons conservé $n = \bar{n}^{-2}\,a^6(1+\xi)$ comme variable, sans expliciter ξ. De telles corrections sont d'ailleurs attendues suite

à l'évolution non linéaire de la distribution, comme nous le verrons à la fin de ce chapitre. A fortiori donc la détermination observationnelle de ξ ne saurait être univoque . Tout au plus garantit-elle qu'il n'y a pas de triple produit $\xi\xi\xi$, avec un coefficient proche de l'unité. Par contre, elle ne peut proscrire des décomposition du type :

$$\xi_{123} = Q\left[a + (b+\xi_{12})(c+\xi_{23}) + sym\right]$$

dans le domaine où ξ est supérieur ou de l'ordre de 1. Evidemment une telle décomposition ne peut pas décrire ξ sur tout le domaine de distance car ξ et ξ doivent, d'après leurs définitions, tendre vers zéro quand r tend vers l'infini. Ceci implique seulement que dans le domaine linéaire aux très grandes distances ξ devra alors avoir une dépendance fonctionnelle différente. Comme tous les calculs précédents sont en termes de n_{12} et non de ξ_{12} le plus simple est de décomposer les corrélations à trois points en produits de n_{12}, n_{23}, n_{31} ce qui est en accord avec l'argumentation de la collisionalité. D'où le *modèle* (dénoté par un tild) pour tronquer la fonction de corrélation spatiale à 3 points n_{123} :

$$\tilde{n}_{123} = \frac{Q}{\bar{n}a^3}\left[n_{12}n_{23} + n_{23}n_{31} + n_{31}n_{12}\right] = \bar{n}^3 a^9 Q\left[(1+\xi_{12})(1+\xi_{23}) + sym\right]$$

qui est arbitraire dans le détail, mais ni plus ni moins que la décomposition de la partie réduite ζ de n_{123} en produit de ξ ($\zeta = Q[\xi_{12}\xi_{23} + sym]$) choisie par Davis et Peebles*. Il est clair que les résultats relatifs au domaine $\xi \sim 1$ ne pourront être que qualitatifs étant donné l'incertitude sur le détail de cette coupure. Nous allons d'ailleurs retrouver cette incertitude dans les autres hypothèses de coupure.

b) Loi de conservation des triplets

Dans le domaine des très courtes distances ($\xi \gg 1$) les

*De fait la cassure choisie est identique à $\xi \gg 1$ (termes en $Q\,\xi^2$). Par contre les premiers termes suivants (en ordre de grandeur) de $\tilde{n}_{123}$ sont ici $2Q(\xi_{12} + sym)$ alors que Davis et Peebles ont les termes $(\xi_{12} + sym)$ qui viennent de la partie non réduite.

galaxies forment des groupes ou des amas liés. Il est largement admis que ces groupements sont *stables* (ils ne sont plus en train de collapser). Dans toute la suite nous admettrons ce résultat, physiquement raisonnable qui peut, comme nous le verrons, être testé numériquement. Dans ce cas, la vitesse relative moyenne doit tendre vers zéro quand la séparation tend aussi vers 0. La vitesse propre, développée au premier ordre, va dépendre linéairement de la séparation.

$$\bar{u}_{12} = k\, x_{12} \quad , \qquad k \equiv k(\theta)$$

n_{123} obéit alors à une équation de conservation des doubles paires (c'est un produit de distribution de paires), qu'on obtient (Voir Annexe III) par l'utilisation réitérée de l'équation de conservation de ces paires, ce qui donne :

$$\partial_\theta \tilde{n}_{123} + \partial_{x_{12}^k} \left(\tilde{n}_{123}\, \bar{u}_{12}^k \right) + \partial_{x_{13}^k} \left(\tilde{n}_{123}\, \bar{u}_{13}^k \right) = 0$$

Cette équation est à rapprocher de l'équation de conservation des triplets qui est obtenue (parallèlement à celle portant sur les paires) en intégrant sur toutes les vitesses de la troisième équation de la hiérarchie de Vlasov, qui porte sur ϱ_{123} . On a :

$$\partial_\theta \int d^9u\, \varrho_{123} + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i^k} \int d^9u\, u_i^k\, \varrho_{123} = 0$$

Le premier terme est simplement la dérivée temporelle de n_{123}. Notant $\langle u_i \rangle_3$ la valeur moyenne de la vitesse propre de la $i^{\text{ème}}$ particule d'un triplet cette équation s'écrit :

$$\partial_\theta n_{123} + \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i^k} \langle u_i^k \rangle_3\, n_{123} = 0$$

Prenant, comme dans l'équation sur les doubles paires, x_{12}, x_{13}, u_{12} et u_{13} comme variables indépendantes, l'équation de conservation des triplets se met sous la forme :

$$\partial_\theta n_{123} + \partial_{x_{12}^k} \langle u_{12}^k \rangle_3\, n_{123} + \partial_{x_{13}^k} \langle u_{13}^k \rangle_3\, n_{123} = 0$$

Dans le domaine virialisé, on a donc :

$$\partial_\theta (n_{123} - \tilde{n}_{123}) + \partial_{x_{12}^k} \left[(n_{123} - \tilde{n}_{123}) \bar{u}_{12}^k \right] + \partial_{x_{13}^k} \left[(n_{123} - \tilde{n}_{123}) \bar{u}_{13}^k \right]$$

$$+ \partial_{x_{12}^k} n_{123} \langle u_{12}^k - \bar{u}_{12}^k \rangle_3 + \partial_{x_{13}^k} n_{123} \langle u_{13}^k - \bar{u}_{13}^k \rangle_3 = 0$$

ce qui montre que la décomposition, que les observations font apparaître, est *équivalente* à une propriété de symétrie du moment centré de la fonction de corrélation à trois points. Il est donc possible qu'une théorie plus complète (à venir) permette d'expliquer les observations et justifier complètement la coupure précédente, à l'aide d'argument généraux de symétrie. Et procédant ici de manière inverse, l'utilisation du résultat observationnel permet d'obtenir une relation de contrainte que devra satisfaire la décomposition du moment de vitesse à trois points dont nous avons besoin pour tronquer la hiérarchie.

c) Décomposition du moment de vitesse à 3 points

Cette décomposition en moments d'ordre inférieur est nécessaire car les corrélations à 3 points apparaissent aussi comme source du champ gravitationnel (termes $S_{//}$ et $S_{\perp}$) à travers le moment de vitesse de ρ_{123} $\int d^9u \, u_{12}^i \rho_{123} = \langle u_{12}^i \rangle_3 \, n_{123}$. Ces termes dictent, conjointement avec le flux de chaleur (termes Q) l'évolution de la température. L'argument tiré du caractère non-collisionnel des galaxies pourrait tout autant s'appliquer aux corrélations complètes (en positions et vitesses) qu'aux seules corrélations spatiales. On pourrait donc envisager de décomposer en produit de ρ_{12}, ρ_{23} et ρ_{31} de manière similaire à n_{123}. N'ayant besoin que du premier moment de vitesse, nous nous contenterons de l'hypothèse intégrale suivante :

$$\int d^9u \, u_{12}^i \rho_{123} = \frac{Q}{\bar{n} a^3} \left[(n_{23} + n_{31}) \int d^6u \, u_{12}^i \rho_{12} + n_{32} \int d^6u \, u_{13}^i \rho_{13} + n_{13} \int d^6u \, u_{32}^i \rho_{32} \right]$$

$$= \frac{Q}{\bar{n} a^3} \left[\bar{u}_{12}^i \, n_{12} (n_{23} + n_{31}) + (\bar{u}_{13}^i + \bar{u}_{32}^i) \, n_{13} \, n_{32} \right]$$

qui s'en inspire directement.

Physiquement, cette hypothèse a un bon comportement. En effet quand la particule numéro trois d'un triplet est éloignée de la paire 1-2, on a :

$$n_{13} \sim n_{23} \sim \bar{n} a^{-2\,6}, \quad n_{123} \sim 2Q\bar{n}a^3 n_{12}, \quad \bar{u}_{13} \sim \bar{u}_{23} \sim 0$$

et la relation s'écrit :

$$\langle u^i_{12} \rangle_3 \sim \bar{u}^i_{12} = \langle u^i_{12} \rangle$$

c'est-à-dire que la vitesse relative d'une paire dans un triplet tend bien vers la vitesse relative d'une paire quand l'influence de la troisième tend vers zéro. De plus, quand 1 et 2 soit éloignées et que 3 est proche de 2, par exemple, on a :

$$\langle u^i_{12} \rangle_3 \sim \bar{u}^i_{32}$$

ce qui exprime simplement que dans un tel triplet, la vitesse moyenne de 2 par rapport à 1 tend vers la vitesse de paire de 2 vers 3 ($\bar{u}^i_{32}$ est porté par $\left.\frac{x^i_{32}}{x_{32}}\right)$ *

Pour des amas virialisés, la vitesse dépend linéairement de la distance et la coupure précédente s'écrit sous la forme :

$$\int d^9u \, u^i_{12} \rho_{123} = n_{123} \langle u^i_{12} \rangle_3 = \bar{u}^i_{12} \tilde{n}_{123}$$

la relation de contrainte du paragraphe précédent est donc évidemment satisfaite!

---

*En particulier, si 1,2 et 3 sont alignées, par raison de symétrie $\langle u^i_{12} \rangle_3$ doit être porté par $\frac{x^i_{12}}{x_{12}}$: $\langle u^i_{12} \rangle_3 = \langle u_{12} \rangle_3 \frac{x^i_{12}}{x_{12}}$. Dans le cas où 3 est entre 1 et 2 alors $\langle u_{12} \rangle = \bar{u}_{32}$ $\left(\text{car } \frac{x^i_{32}}{x_{32}} = k \frac{x^i_{12}}{x_{12}}\right)$. Dans le cas contraire, $\langle u_{12} \rangle_3 = -\bar{u}_{32}$

d) Valeur du flux de chaleur

Nous avons vu qu'aux très courtes distances on doit avoir : $\bar{u}=kx$ les galaxies étant en groupements stables. En fait *tous* les moments *impairs centrés* de la fonction de corrélation à deux points doivent alors s'annuler quand x tend vers zéro (ce qui est à rapprocher de la propriété similaire du 1er moment impair de la fonction à trois points qui a été mise en évidence au paragraphe précédent). En particulier, pour le second moment impair centré, qui est le flux de chaleur ($Q = \langle (u-\bar{u})^3 \rangle$) on doit avoir $Q_{//} \propto x^3$ et $Q_{\perp} \propto x^3$. C'est pourquoi nous allons modéliser, dans l'équation d'évolution de la température les termes sources qui comprennent ce flux par :

$$\begin{cases} -\frac{1}{x^4}\partial_x\left[nx^4 Q_{\perp}\right] = q_1 n x^2, & q_1 \equiv q_1(\Theta) \\ -\frac{1}{x^2}\partial_x\left[nx^2 Q_{//}\right] - 2\partial_x(nQ_{\perp}) = q_2 n x^2, & q_2 \equiv q_2(\Theta) \end{cases}$$

On retrouvera donc l'approximation d'ordre 0 choisie par Davis et Peebles en posant $q_1=q_2=0$, ce qui correspond au cas d'une distribution symétrique par rapport à la moyenne. Dans l'état actuel de la théorie analytique on n'est pas capable de prévoir a priori ce que valent q_1 et q_2. Par contre, l'écart à la symétrie de ζ_{12} que ces termes traduisent pourrait être analysé numériquement au cours d'une simulation, tout comme le comportement aux petites distances du moment impair d'ordre inférieur $\bar{u}$. Nous allons pour le moment conserver ces termes afin de voir l'influence de la non-nullité du flux de chaleur sur la dépendance fonctionnelle de $T_{//}$ et $T_{\perp}$ et donc de $\bar{u}$ et n. Nous verrons qu'ils induiraient des corrections de même ordre que des variations du détail de la coupure de n_{123}, détail qui, comme nous l'avons vu, n'est à l'heure actuelle accessible ni aux observations ni à la théorie analytique.

3) Résolution des équations

Les trois hypothèses que nous venons de voir (coupures des corrélations triples et modèle de flux de chaleur) permettent d'obtenir un système fermé de quatre équations intégrodifférentielles. Nous allons d'abord modéliser pour les *petites distances* les termes intégraux par des termes locaux. Ceci va nous permettre de trouver l'évolution dans ce domaine de n, $\bar{u}$, $T_{//}$ et $T_{\perp}$, puis de discuter les corrections à leur comportement aux courtes distances qu'on appellera dans la suite comportement asymptotique.

a) Evaluation des termes non-locaux :

Les hypothèses de fermeture du paragraphe précédent nous ont conduit à l'écriture suivante des termes sources :

$$S_o = \frac{QGam}{\bar{n}a^3}\frac{x^i}{x}\int d^3x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3}\left(n_{12}n_{23}+n_{23}n_{31}+n_{31}n_{12}\right) - (1/2) \qquad (1)$$

$$S_\perp \delta^{ij} + \left(S_{//}-S_\perp\right)\frac{x^i x^j}{x^2} = \frac{2QGam}{\bar{n}a^3}\int d^3x_3 \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3}\left[\bar{u}_{12}^i n_{12}\left(n_{23}+n_{31}\right)+\left(\bar{u}_{13}^i+\bar{u}_{32}^i\right)n_{31}n_{32}\right]+(1/2) \qquad (2)$$

n_{13} ne dépendant que de x_{13}, le troisième terme de (1) et le second de (2) sont nuls, ce qui permet d'écrire :

$$S_o = \frac{QGam}{\bar{n}a^3}\frac{x^i}{x}\int d^3x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} n_{32}\left(n_{31}+n_{12}\right) - (1/2)$$

$$S_\perp \delta^{ij} + \left(S_{//}-S_\perp\right)\frac{x^i x^j}{x^2} = \frac{2QGam}{\bar{n}a^3}\left[\bar{u}_{12}^i n_{12}\int d^3x_3 \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3} n_{32} + \int d^3x_3 \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3}\left(\bar{u}_{13}^i+\bar{u}_{32}^i\right)n_{31}n_{32}\right]+(1/2)$$

Il est clair que les contributions principales à ces intégrales viennent des petites distances où les corrélations sont fortes et donc $n \gg 1$. Dans ce domaine, les vitesses dépendent linéairement de la distance :

$$\bar{u}_{13}^i + \bar{u}_{32}^i = k\left(x_{13}^i + x_{32}^i\right) = \bar{u}_{12}^i$$

On a donc, dans le cadre de cette approximation :

$$S_\perp = 0$$

$$S_{//}\frac{x^i x^j}{x^2} = \frac{2QGam}{\bar{n}a^3}\bar{u}_{12}^i \int d^3x_3 \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3} n_{32}\left(n_{12}+n_{31}\right) + (1/2)$$

$$= \frac{2QGam}{\bar{n}a^3}\bar{u}\frac{x^i x^j}{x^2}\frac{x^j}{x}\int d^3x_3 \frac{x_{31}^j}{x_{31}^3} n_{32}\left(n_{12}+n_{31}\right)+(1/2)$$

et donc :

$$S_{//}(x,\theta) = 2\bar{u} S_o(x,\theta)$$

Enfin, toujours aux petites distances, où l'on sait grâce aux observations que n a un comportement en loi de puissance ($n \sim \bar{n} a^{-6} (\frac{x}{x_o})^{-\gamma}$), on doit avoir pour contribution principale à S_o :

$$S_o(x,\theta) = a(\theta) \frac{s}{\bar{n}^2 a^6} n_{12}^2 x_{12}$$

où s est une constante, la dépendance temporelle en a apparaissant explicitement. Cette constante est calculable et ne dépend que de γ *
Evidemment, dans le domaine où $n \sim \bar{n}^{-2} a^6 (\xi \sim 1)$, on aura aussi des termes de la forme nx, qui seront d'amplitude comparable et dont il faudra tenir compte si l'on veut résoudre le système hors du domaine asymptotique. Ces termes seront discutés au sous-paragraphe c) suivant et nous nous contentons pour le moment de modélisation suivante :

$$S_o = a \frac{s}{\bar{n}^2 a^6} n^2 x, \quad S_{//} = 2\bar{u} S_o, \quad S_\perp \equiv 0$$

---

* on a

$$S_o = \frac{QGam}{\bar{n} a^3} \frac{x^i}{x} A^i, \qquad A^i = \int d^3x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} n_{32} (n_{12} + n_{31}) + (1/2)$$

$$A^i = 4\pi \frac{\bar{n}^4 a^{12}}{x_o^{-2\gamma}} \int_{+1}^{-1} d(\cos\theta) \int_0^\infty dx_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}} \left(x_{31}^2 + x_{12}^2 + 2 x_{12} x_{31} \cos\theta \right)^{-\gamma/2} \left(x_{12}^{-\gamma} + x_{31}^{-\gamma} \right)$$

on a $A^i = n_{12}^2 x_{12}^i I(\gamma)$ où $I(\gamma)$ est intégrale adimensionnelle $\left(z = \cos\theta, r = \frac{x_{31}}{x_{12}} \right)$:

$$I(\gamma) = 4\pi \int_0^\infty dr (1 + r^{-\gamma}) \int_{+1}^{-1} dz\, z (1 + r^2 + 2rz)^{-\gamma/2}$$

$$I(\gamma) = \frac{4\pi}{(2-\gamma)(4-\gamma)} \int_0^\infty dr\, r^{-2} (1 + r^{-\gamma}) \left[(1+r)^{4-\gamma} - |1-r|^{4-\gamma} - (4-\gamma) r \left((1+r)^{2-\gamma} - |1-r|^{2-\gamma} \right) \right]$$

ce qui donne : I(1,8) = 105,6 et donc $\delta(\gamma = 1,8) \sim 106\, QGm\bar{n} a^3$

Finalement, il est commode pour l'analyse qui va suivre de faire apparaître dans les équations la densité adimensionnelle $n/\bar{n}a^{-2}$ que nous appellerons Ψ ($\Psi = 1 + \xi$), ce qui permet d'écrire le système à résoudre sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_\theta\left(\Psi x^2 \dfrac{\partial x}{\partial x_0}\right) = 0 & (1) \\ \Psi x^2 \partial_\theta \bar{u} = a\delta \Psi^2 x^3 + 2\Psi x T_\perp - \partial_x(\Psi x^2 T_{//}) & (2) \\ \dfrac{1}{x^2}\partial_\theta(x^2 T_\perp) = q_1 x^2 & (3) \\ \Psi^2 x^4 \partial_\theta\left(\dfrac{T_{//}}{\Psi^2 x^4}\right) = q_2 x^2 & (4) \end{cases}$$

b) Résolution asymptotique :

Aux courtes distances ($x \ll 1$) les corrélations sont fortes et on a $\Psi \gg 1$. Le "petit paramètre" du problème est ici $1/\Psi$. Nous appelons résolution asymptotique la résolution des équations quand on ne garde que les termes dominants aux courtes distances, c'est-à-dire ceux d'ordre le plus élevé en Ψ. Ceci va nous permettre de trouver l'évolution temporelle de $\bar{u}$, de Ψ *quelle que soit sa forme* (forme qui ne *peut pas* être prévue par cette théorie seule), ainsi que la dépendance fonctionnelle de $T_{//}$ et $T_\perp$.

A $x \ll 1$, $\bar{u}$ dépend linéairement de la distance, le membre de gauche de l'équation (2) est donc d'ordre $1/\Psi$ par rapport à celui de droite. Il faut donc résoudre :

$$a\delta \Psi^2 x^3 + 2\Psi x T_\perp - \partial_x(\Psi x^2 T_{//}) = 0 \qquad (5)$$

$T_\perp$ ou $T_{//}$ doivent donc au moins comporter un terme en $ax^2\Psi$. De plus, des termes en $a\Psi x$ où $a\Psi^2 x^2$ (se compensant entre $T_\perp$ et $T_{//}$) ne peuvent pas faire partie de la solution, car $T_\perp$ et $T_{//}$ sont des quantités physiques

qui ne divergent pas aux courtes distances. Enfin, il est raisonnable de penser que dans le domaine virialisé $T_\perp$ et $T_{//}$ doivent être du même ordre de grandeur. On a donc :

$$T_{//} = \tau_{//} a x^2 \Psi \quad , \quad T_\perp = \tau_\perp a x^2 \Psi \tag{6}$$

Leurs amplitudes $\tau_{//}$ et $\tau_\perp$ (constantes) étant liées à s par la relation (5)* les membres de droite des équations (3) et (4) sont donc négligeables (en $1/\Psi$ par rapport à $x^2\Psi$). $x^2 T_\perp$ et $T_{//}/\Psi^2 x^4$ sont donc des quantités conservées (à l'ordre le plus élevé) et on a :

$$\begin{cases} x^2 T_\perp = x_0^2 T_{\perp 0} & (7) \\ T_{//}/\Psi^2 x^4 = T_{//0}/\Psi_0^2 x_0^4 & (8) \end{cases}$$

où les "conditions initiales" sont indiquées par un indice 0. Remplaçant $T_\perp$ et $T_{//}$ tirés de (6) dans (7) et (8), on obtient :

$$\begin{cases} a \Psi x^4 = a_0 \Psi_0 x_0^4 & (9) \\ a/\Psi x^2 = a_0/\Psi_0 x_0^2 & (10) \end{cases}$$

La multiplication du carré de (10) par (9) permet d'éliminer x, ce qui donne :

$$\frac{a^3}{\Psi} = \frac{a_0^3}{\Psi_0} \iff \Psi = a^3 \frac{\Psi_0}{a_0^3} \tag{11}$$

La multiplication de (9) par (10) permet ensuite d'éliminer Ψ, d'où :

---

*Si $\xi \propto x^{-\gamma}$ cette relation prend la forme :

$$\tau_\perp - (2-\gamma)\tau_{//} = s/2$$

$$a^2 x^2 = a_0^2 x_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{-1} a_0 x_0 \tag{12}$$

Ces deux derniers résultats ne font que traduire l'équilibre statistique aux courtes distances. En effet dérivant (12), on a :

$$\bar{u} = \partial_\theta x = -\frac{\partial_\theta a}{a^2} a_0 x_0 = -\frac{\partial_\theta a}{a} x$$

et la vitesse $\bar{V}$ dans l'espace physique est donnée par :

$$\bar{V} = \frac{dr}{dt} = Hr + \frac{\bar{u}}{a}$$

Or :

$$\frac{\bar{u}}{a} = -\frac{\partial_\theta a}{a^2} x = -\partial_t a \, x = -Hr \text{ et donc } \bar{V} = 0$$

ce qui traduit simplement le fait qu'aux courtes distances, la distance moyenne entre galaxies reste constante, et donc qu'elles ont une vitesse relative moyenne nulle. D'après (11) on a d'autre part :

$$\bar{n} a^3 \Psi d^3 x = \bar{n} \Psi d^3 (ax) = \text{constante}$$

c'est à dire que le nombre, dans un volume à proximité, de voisins d'une particule donnée est constant (au lieu de décroître en a^{-3}) , ce qui traduit encore la constance (en moyenne) des distances entre les galaxies (et qui était également exprimé par la conservation de $nx^2 \frac{\partial x}{\partial x_0}$).

c) Ecart au comportement asymptotique

Le formalisme lagrangien mis en place se prête particulièrement bien à une analyse en trajectoire non perturbée (la solution asymptotique), suivie d'une analyse des écarts à cette trajectoire par un développement

en fonction du petit paramètre* (ici $1/\Psi$). Ce qui nous permet d'obtenir *analytiquement* (quand $\Psi > 1$) les résultats *numériques* de Davis et Peebles quelle que soit la valeur de Ω.
Pour cela, nous utilisons leurs hypothèses complémentaires :

$$\begin{cases} q_1 = q_2 = 0 & \text{(pas de flux de chaleur)} \\ \xi_0 = \xi_i \left(\dfrac{x_0}{a_0^{3/\gamma - 1}} \right)^{-\gamma} & (\xi \text{ initial est une pure loi de puissance}) \end{cases}$$

La première correction que nous calculons (en négligeant les termes en $1/\Psi^2$) fait apparaître des déviations d'ordre $1/\Psi$:

$$\xi = \xi_i \left(\frac{x}{a^{3/\gamma - 1}} \right)^{-\gamma} + \alpha_1 \left(1 - \frac{a^3}{a_0^3} \right)$$

$$T_{//} = a x^2 \left[\tau_{//} \Psi + \alpha_2 \left(1 - \frac{a^3}{a_0^3} \right) \right]$$

$$T_{\perp} = a x^2 \left[\tau_{\perp} \Psi + \alpha_3 \left(1 - \frac{a^3}{a_0^3} \right) \right]$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont données par des intégrales adimensionnelles calculables. Ces résultats sont conformes à l'intégration numérique de Davis et Peebles et montrent d'après la façon même dont sont obtenues les corrections (par intégration temporelle des termes sources) que l'on se raccorde de manière tangente aux conditions initiales (en particulier la vitesse relative moyenne dans l'espace physique $V = Hx + \frac{u}{a}$ doit venir tangenter l'axe des x aux petites distances $\left(\frac{u}{a} \to -Hx \right)$).

Nous ne détaillerons cependant pas plus ces calculs un peu lourds car les résultats ne sont qu'indicatifs du type de corrections attendues.

---

* Il est d'ailleurs possible de montrer (Bouchet et Pellat, 1982) en utilisant les mêmes hypothèses que Davis et Peebles qu'il *n'existe pas* de solutions où ξ se comporte comme une pure loi de puissance (ou une succession de lois de puissance) sur tout l'espace. Il faut donc "perturber" la solution asymptotique.

Les valeurs numériques précises de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ n'ont *aucune* signification. Pour le voir, écrivons la forme a priori des corrections à l'évaluation asymptotique des termes sources, dont la connaissance est nécessaire pour calculer les déviations au comportement à courte distance. On doit avoir :

$$S_0 = a_0 \chi \Psi^2 + b_0 \chi \Psi \quad , \quad S_{//} = 2\bar{u} S_0 + b_{//} \chi^2 \Psi \quad , \quad S_\perp = b_\perp \chi^2 \Psi$$

où s_0, s et $s_\perp$ sont des constantes spatiales.
Examinons les contributions au terme $b_0 \chi \Psi$ par exemple. On a :

$$S_0 = Q G a m \bar{n} a^{-3} g \frac{x^i}{\chi} \left[\Psi_{12} \int d^3 x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} \Psi_{32} + \int d^3 x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} \Psi_{31} \Psi_{32} \right] + (1/2)$$

Exprimant Ψ en fonction de ξ, on obtient :

$$S_0 = Q G a m \bar{n} a^{-3} g \frac{x^i}{\chi} \left[(2 + \xi_{12}) \int d^3 x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} \xi_{32} + \int d^3 x_3 \frac{x_{31}^i}{x_{31}^3} \xi_{31} \xi_{32} \right] + (1/2)$$

On voit alors que les termes correctifs au terme asymptotique en $\chi \Psi^2$ ont une double origine :

i) Toute déviation au comportement modèle de $\xi = \Psi - 1 \propto \chi^{-\gamma}$ fait apparaître des contributions d'ordre $\chi \Psi$ dûes à l'intégrale portant sur $\xi_{31} \xi_{32}$ (quand $\xi_{31} > 1$ et $\xi_{32} \sim 1$ ou inversement). Or c'est précisément ce genre de correction aux termes sources qui donne finalement naissance à la déviation de ξ. Il n'est donc pas cohérent de la calculer sans en tenir compte dans les termes sources.

ii) La seule justification de la cassure des corrélations triples est dûe aux observations et celles-ci ne peuvent pas encore donner d'information sur le détail de cette coupure. Or des variations portant sur les termes en Ψ (*ie.* n) dans la coupure de n_{123} se traduisent évidemment par des variations du terme source en $\chi \Psi$. Nous ne disposons donc d'aucun guide pour évaluer l'amplitude de ce terme.

On peut appliquer la même analyse aux contributions à $b_{//} \chi^2 \Psi$ et $b_\perp \chi^2 \Psi$ avec l'incertitude supplémentaire qu'on ne connait pas la forme exacte de

la coupure du premier moment de vitesse. De plus les termes de flux de chaleur sont a priori de même ordre et il n'existe *aucune* raison pour les négliger. C'est pourquoi, bien qu'ayant mis en place un formalisme permettant de prendre en compte analytiquement les termes en $x^2\psi$, les corrections calculées n'ont qu'une valeur illustrative. Pour progresser, l'effort devra porter sur une amélioration des hypothèses *en amont* de cette théorie.

d) Conclusions

Avant de clore ce chapitre, nous allons encore faire deux remarques. La première concerne la relation entre l'énergie thermique et l'énergie potentielle de particules dans un univers en expansion. Cette relation, connue sous le nom de théorème d'énergie cosmique ou d'Irvine-Layzer (1965) - Dmitriev et Zeldovich (1964) peut s'obtenir par exemple (Voir annexe VII) par intégration sur les vitesses, après multiplication par $u^2/\bar{n}a^3$ de la première équation de la hiérarchie de Vlasov*

$$\partial_\theta \langle u^2 \rangle = a\, G m \bar{n} a^3 \partial_\theta \int \frac{d^3x}{x} \psi$$

et l'on a $u = av$, où v est la vitesse propre hors flot de Hubble. D'où :

$$\partial_\theta a^2 \langle v^2 \rangle \propto a \partial_\theta \int \frac{d^3x}{x} \psi$$

Nous venons de voir (b) que dans le domaine virialisé on a $\psi \propto a^3$, ce qu'on peut encore écrire :

$$\psi = \psi_0 \, a^{3-\gamma} \, x^{-\gamma}$$

Si la contribution principale à l'intégrale vient de ce domaine virialisé, l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\partial_\theta a^2 \langle v^2 \rangle \propto a \partial_\theta a \int \frac{d^3x}{x} \frac{a^{2-\gamma}}{x^\gamma}$$

---

*Elle peut aussi être obtenue pour un groupe isolé de particules ou d'après la hiérarchie BBGKY (Fall et Severne, 1976, Davis et Peebles, 1977), où encore d'après l'équation de Vlasov (en moyennant sur l'espace la conservation de l'isotropie obtenue au II-3-d).

Il est intéressant de remarquer que, quand $\gamma = 2$, l'intégrale est une simple constante adimensionnelle et on a :

$$\partial_\theta a^2 \langle v^2 \rangle \propto \partial_\theta a^2$$

On retrouve alors, mais cette fois dans le cas d'un univers en expansion, la propriété remarquée par Fournier d'Albe et rappelée par Mandelbrot : Dans le cas particulier où $\gamma = 2$, l'agitation thermique est constante (après éventuellement une relaxation en a^{-2}, comme pour des particules libres : $v \propto 1/a$)
Bien entendu, ce résultat suppose que la virialisation est complète* et que l'exposant γ ne dépend plus de θ. Ces considérations ne peuvent donc décrire le résultat de simulations numériques adiabatiques (sauf peut-être à la fin) dans lesquelles l'exposant varie avec le temps. Il n'en demeure pas moins vrai que la dépendance en x^{-2} est très proche de la dépendance observée, et que cela constitue déjà un succés partiel de l'approche développée dans cette thèse.

La seconde remarque concerne aussi le spectre des corrélations de densité. Les considérations développées dans ce chapitre ne permettent pas de le calculer. Dans le travail de Davis et Peebles, ce spectre est obtenu en admettant qu'il est de la forme $f(a^2/x^3)$ *dans la phase non linéaire*. La dépendance choisie, autosimilaire, est celle de la théorie *linéaire*. En utilisant cette hypothèse, on peut alors trouver un spectre en $x^{-9/5}$ remarquablement proche de celui observé**. Ce spectre est solution des équations de la hiérarchie dans la mesure où l'on fait l'hypothèse ad hoc supplémentaire de coupure des corrélations triples en fonction des corrélations doubles qui a été décrite ci-dessus. Il n'existe pas actuellement d'autres approche théorique que celle purement probabiliste et statique

---

* Les structures les plus vaste ne sont probablement pas virialisées aujourd'hui (ce qui peut expliquer l'écart à deux), mais les contributions principales à l'intégrale viennent des petites distances.

** c'est l'argument développé en note du I-3-c pour un bruit blanc initial (n=0).

de Mandelbrot pour "justifier" cette fermeture.

Essayant d'établir directement cette propriété des corrélations triples, nous avons envisagé d'utiliser les techniques non-linéaires disponibles. Le groupe de renormalisation est basé, dans ses applications actuelles à la turbulence, sur l'invariance par translation sur l'espace et le temps des corrélations doubles. Or, dans le problème que nous étudions le facteur de dilatation des échelles a(t) supprime la propriété d'invariance sur le temps. La seule méthode disponible actuellement est la D.I.A, méthode introduite par R. Kraichnan pour la turbulence fluide.

Les équations de la D.I.A pour ce problème ont été écrites et leur étude en en cours. L'impossibilité dans le cas de l'Univers de connaitre observationnellement les propriété temporelles du spectre de corrélation, ainsi que la présence du facteur d'expansion, pourraient constituer une difficulté insurmontable théoriquement si nous ne disposions de simulations numériques.

On peut en effet imaginer que si l'on sait reproduire le spectre de corrélation de densité observé, on pourra utiliser les propriétés temporelles des fonctions de corrélation à deux temps calculées par le code numérique pour progresser dans la théorie. C'est le programme que nous nous sommes fixé et nous allons maintenant décrire le code numérique utilisé.

C H A P I T R E IV

APPROCHE NUMERIQUE

C H A P I T R E IV

APPROCHE NUMERIQUE

Le chapitre II nous a montré qu'un modèle de particules autogravitantes, dans un Univers globalement en expansion, et interagissant sans collisions, est une approximation raisonnable pour décrire la distribution de masse réelle aux échelles comprises entre 100 kpc et 10 Mpc. Nous avons aussi vu au chapitre III que les précisions fines (c'est-à-dire hors du domaine asymptotique) de la théorie analytique, dépendaient du détail des hypothèses supplémentaires nécessaires pour aboutir à un ensemble solvable. Le détail de ces hypothèses est pour le moins mal connu, aussi bien théoriquement qu'observationnellement, ce qui montre l'intérêt d'un outil ne reposant que sur les hypothèses du chapitre II et dont on contrôle tous les paramètres. Dans ce chapitre, nous allons voir les problèmes que pose la traduction de ces hypothèses physiques de base en un Modèle Mathématique puis numérique ainsi que le type d'algorithme auquel cela conduit (§ 1). Nous verrons ensuite la réalisation détaillée de chacune des étapes qui interviennent dans l'algorithme et les choix nécessaires qui ont été faits (§2). Le troisième paragraphe expose le principe de l'analyse des données pour aboutir aux quantités qui apparaissent dans la théorie ainsi que la traduction numérique de ce principe. Enfin le dernier paragraphe sera dévolu à l'analyse des premiers résultats obtenus, pour différents types de conditions initiales ainsi qu'aux conclusions qu'on peut d'ores et déjà commencer à en tirer.

1) Définition du modèle et architecture générale du "code"*

a) Rappel du modèle à simuler

Le phénomène physique que l'on veut simuler est l'évolution non-collisionnelle de la distribution de particules, dans un premier temps de même masse, sous l'influence de leur propre gravité, et d'elle seule. Pour simplifier, on considère que leur masse est telle qu'elle suffit juste à fermer l'Univers ($\Omega = 1$). En fait, d'autres simulations numériques (i.e. Doroshkevich et Al, 1980) ont montré que l'évolution de modèles basse densité aujourd'hui ($\Omega = 0.01$) était simplement plus lente, tout en conduisant à des résultats identiques, mais retardés dans le temps**. D'ailleurs, rien n'empêchera au cours d'une étude ultérieure de varier ce paramètre.

Nous avons vu au chapitre II que les objets non collisionnels sont décrits par l'équation de Vlasov, dont on peut tirer une hiérarchie d'équations qui lui est équivalente. Le chapitre III a traité de la *hiérarchie*, plus appropriée pour utiliser les résultats observationnels et aboutir à une résolution analytique. Dans cette partie, nous allons plutôt "résoudre" numériquement *l'équation* de Vlasov. Le modèle mathématique qu'on veut simuler est donc défini par des *conditions initiales* et par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \left(\partial_\theta + u\nabla - \nabla\Phi\,\partial_u\right) f(x,u,\theta) = 0 \\ \Delta\Phi = \dfrac{2D}{\theta^2}\,\delta\rho \quad , \quad \delta\rho = \dfrac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 \\ \rho = m\int f\, d^D u \quad , \quad \bar{\rho} = \int \rho\, d^D x \Big/ \int d^D x \end{cases}$$

---

* Il est coutume d'appeler un ensemble de programmes de simulation numérique un "code".

** Ceci n'est bien sûr valable que tant qu'on s'intéresse à des temps où Ω reste suffisamment proche de 1 (aujourd'hui : $0.01 \leqslant \Omega \leqslant 2$). Bien sûr quand $\Omega \ll 1$, l'effet de la gravité devient négligeable aux grandes échelles : l'univers croît linéairement et toutes les grandes structures sont "gelées".

où D est la dimension de la simulation et où on a utilisé la forme particulière de l'équation de Poisson à laquelle on avait abouti, pour $\Omega = 1$, au chapitre II. Evidemment, le modèle étant non-collisionnel, f doit être une fonction régulière (ρ est une densité continue).

De plus, nous avons vu que dans le cas d'un système périodique les moments de l'équation de Vlasov montrent que le nombre de particules et l'impulsion totale doivent être conservées (!), la relation de conservation de l'énergie s'écrivant :

$$\partial_\theta (E_c + U) = hU, \quad h = \frac{\partial_\theta a}{a} \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} \int u^2 \rho \, d^D x \\ U = \frac{1}{2} \int (\rho - \bar{\rho}) \Phi \, d^D x = \frac{\bar{\rho}}{2} \int \delta\rho \, \Phi \, d^D x \end{cases}$$

Le système de coordonnées est toujours celui défini au chapitre II :

$$\begin{cases} r = ax \\ \frac{dr}{dt} = Hr + \frac{u}{a}, \quad H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \\ dt = a^2 d\theta \quad (\text{et } \Omega = 1, \text{ donc } \frac{a}{a_0} = \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^2) \end{cases}$$

où r et t sont les coordonnées "physiques" habituelles.

En admettant donc que dans la suite on sache parfaitement simuler numériquement ce modèle mathématique des hypothèses physiques de base, on va pouvoir suivre l'évolution des diverses conditions initiales, c'est-à-dire de divers types de "fluctuations primordiales". On pourra de plus calculer toutes les quantités qui apparaissent dans la théorie analytique via les valeurs moyennes des produits de f aux différents points.

b) Modèle numérique

Un ordinateur ne peut traiter que d'un nombre fini (quoique très grand) de variables sur lesquelles il effectue des opérations purement algébriques. Il faut donc discrétiser les variables continues (f en particulier) et ramener le formalisme integrodifférentiel précédent à une suite d'opérations algébriques. Tout le problème va être de définir un modèle numérique qui simule fidèlement le modèle mathématique défini.

La méthode la plus directe pour résoudre l'équation de Vlasov consiste à discrétiser l'espace des phases en le découpant en cellules. f est alors définie au centre de chacune des mailles d'un réseau de pas Δ à 2D dimensions (D dimensions d'espace et D dimensions en vitesse) et le nombre de particules par cellules est simplement donné par $f\Delta^{2D}$. Les opérations différentielles sont ensuite ramenées à des opérations algébriques en utilisant des développements de Taylor tronqués à un certain ordre. Par exemple, on prendra pour dérivée spatiale centrée (exacte à l'ordre 2 prés)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_i} = \frac{f(x_i+\Delta) - f(x_i-\Delta)}{2\Delta}$$

les dérivées par rapport à u étant évalués de manière similaire. A partir de la valeur de f en chaque point de la grille des centres à l'instant θ on peut donc calculer la dérivée par rapport au temps en chaque point de la distribution. Et approximant là encore cette dérivée par un schéma aux différences finies, avec un pas de temps DT suffisamment petit, on obtient la valeur de f en chaque point au temps θ + DT. On est donc en principe capable, à partir d'une distribution initiale de calculer f à n'importe quel instant ultérieur.

Malheureusement le nombre de points de grille nécessaires (sauf en 1D) est énorme. Avec une résolution moyenne correspondant à 100 points de discrétisation sur chaque axe on aboutit déjà à $100^4 = 10^8$ points de grille en 2D. Et il faut au minimum stocker en chaque point les valeurs de f, sans compter le programme lui-même et les variables auxiliaires. Cette capacité n'est pas disponible sur les ordinateurs actuels (par exemple au

CIRCE (1.25×10^6 mots mémoire simple précision accessibles en mémoire centrale) ce qui fait que cette méthode directe n'est pas utilisable.

Ce constat d'impuissance a poussé les numériciens des plasmas à revenir au problème initial et à développer des codes particulaires non collisionnels. Cependant, la simulation directe de l'évolution sans collision est impossible. En effet, pour que l'évolution à grande échelle devant la longueur des Jeans λ_J soit non collisionnelle, il faut comme nous l'avons vu un grand nombre de particules à l'intérieur de la sphère de Jeans (pour que la somme des interactions binaires à l'intérieur soit en moyenne nulle et que ne subsiste que la partie champ moyen). La manipulation d'un aussi grand nombre de particules est là aussi hors de portée des moyens de calcul actuels (1000 particules par sphère de Jeans et un volume de simulation en 2D correspondant à 100x100 volumes de Jeans font 10^6 particules... et 10^{12} interactions binaires à calculer par pas de temps).

Il faut donc trouver un moyen de couper artificiellement les interactions à courte distance. Pour cela on commence par découper l'espace en petits cubes de coté Δ, c'est-à-dire en mailles d'un réseau de pas Δ qui contiennent chacune plusieurs particules en moyenne. Ces particules sont ensuite affectées au centre des mailles ce qui permet de définir sur la grille des centres (voir figure I) une densité discrète qui est une valeur moyenne sur la maille. A partir de ces valeurs discrètes de la densité on peut résoudre numériquement l'équation de Poisson pour obtenir ensuite le champ gravitationnel qui permet "d'avancer" les particules .

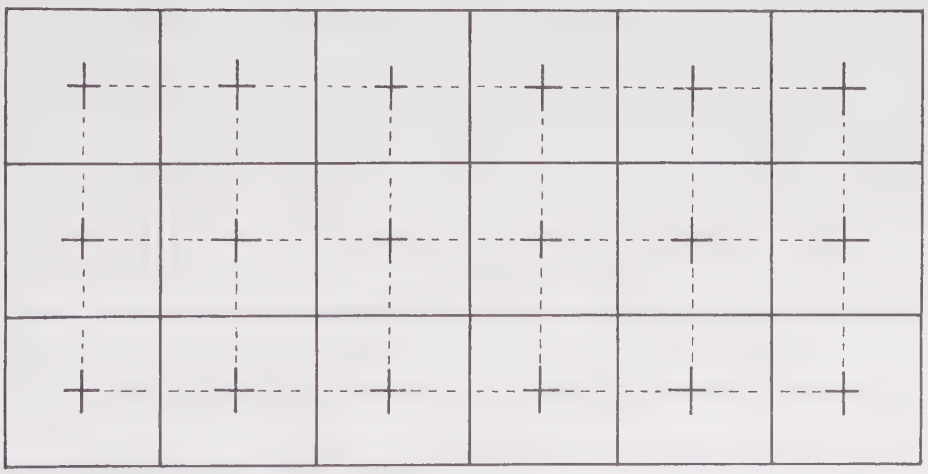


Figure I (pour D = 2) - En traits pleins, la grille de découpe de l'espace
- croix et pointillés constituent le réseau des centres, sur lesquels sont calculées toutes les quantités (i.e. la densité)

Le passage par l'intermédiaire de la grille permet de définir la densité par une *moyenne locale* , ce qui permet de couper les collisions, et de considérer les valeurs de ρ obtenues comme les valeurs *discrètes* d'une fonction *continue* . Il faut pour cela que le nombre de particules par maille soit suffisant pour éviter de trop grandes fluctuations statistiques (en général ce nombre est de l'ordre de dix). Notant $\hat{f}$ la distribution (discrète) des particules :

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{N} \delta(x - x_i)\,\delta(v - v_i)$$

On a pour ρ :

$$\rho = \frac{1}{\Delta^D} \int_{x+\Delta/2}^{x-\Delta/2} d^D x' \int \hat{f}\, d^D v$$

et tous les autres moments de vitesses de la fonction de distribution f peuvent être calculés de manière similaire :

$$\int u^n \hat{f}\, dv = \frac{1}{\Delta^D} \int_{x+\Delta/2}^{x-\Delta/2} dx' \int u^n \hat{f}\, dv = \frac{1}{\Delta^D} \sum_{i \in \text{maille}} u_i^n$$

sans avoir à faire de référence explicite à f .

Revenons maintenant à l'espace de phase. Le théorème de Liouville indique que les éléments de volume de cet espace sont conservés $\left(\frac{d\delta V}{dt} = 0\right)$, c'est-à-dire qu'un "morceau" quelconque de l'espace de phase peut se déformer au cours du temps, mais son volume doit rester constant. Or on peut représenter f (la distribution qui intervient dans l'équation de Vlasov) par des surfaces d'isodensité sur lesquels f a une valeur constante . Ces surfaces définissent des volumes invariants au cours de l'évolution. Calculer l'évolution de f , c'est alors simplement calculer la déformation des surfaces d'isodensité, ce qui peut être fait en suivant l'évolution de points choisis sur ces surfaces. Ces points suivent les caractéristiques de f , c'est-à-dire les trajectoires des particules. Chaque valeur de f peut être représentée par un ensemble de particules échantillons qui sont avancées suivant les caractéristiques et servent ensuite à reconstruire les surfaces isodensité. On voit donc que les particules du modèle particule-grille peuvent être considérées comme un échantillonage de f dans l'espace de phase. Suivre l'évolution des particules sur la grille revient

donc bien à suivre l'évolution non collisionnelle de f ("Résoudre" Vlasov) ce qui est naturel puisque l'équation de Vlasov est la description mathématique des propriétés d'un système sans collision.

Cette façon de considérer les particules comme des échantillons dans l'espace de phase montre qu'elles n'ont pas à être obligatoirement assimilées à des particules physiques (ici des galaxies). Ce sont plutôt des "macroparticules" dont chacune peut représenter un grand nombre de particules "vraies"*. On peut d'ailleurs se représenter ces macroparticules comme des nuages de particules dont la masse totale, la position et la vitesse du centre de masse correspondent à la masse, la position et la vitesse de la macroparticule . Dans notre cas, une fois définie l'échelle spatiale de la simulation, sachant la valeur de la densité moyenne que l'on veut simuler (i.e. Ω) et le nombre total de particules dans la simulation, on en déduit la masse de nos particules, ce qui donne ce qu'elles représentent (amas globulaires, galaxies, amas de galaxies..., si D = 3).

En résumé, pour "résoudre" Vlasov, on considére des macroparticules échantillon de l'espace des phases. On superpose à l'espace une grille et toutes les quantités physiques sont calculées sur la grille des centres des mailles en moyennant sur celles-ci. Enfin les opérations différentielles sont approximées par des schémas aux différences finies. Le choix de ceux-ci, ainsi que la méthode d'affectation des macroparticules aux centres seront présentés en détail dans le second paragraphe. Auparavant nous allons décrire l'organisation générale du code et préciser ses différentes étapes.

c) Présentation du code

Etant donné le modèle numérique défini, la seule différence entre les hypothèses de Base de l'approche analytique et celles de l'approche

---

*Ainsi dans les simulations de galaxies, si on peut manipuler 10^6 particules, chacune d'entre elles représente 10^6 étoiles, considérées en bloc. (Voir Sygnet, thèse de 3ème cycle 1983 par exemple).

numérique est la dimension considérée.

En effet ce code est bidimensionnel (D = 2) c'est-à-dire que l'on simule un Univers de barres qui se dilatent. Les raisons de ce choix sont multiples.

- La première tient à la "lourdeur" d'un code tridimensionnel. Il parait donc raisonnable, surtout dans le temps extrêmement court d'un 3ème cycle, de résoudre tous les problèmes inévitables de mise au point (par exemple le choix d'un schéma donné de différentiation numérique) à l'aide d'une première version bidimensionnelle, dont le passage à D=3 constitue une extension naturelle.
- La seconde raison est plus technique. Etant donnée la finesse des diagnostics désirés, il est extrêmement facile d'atteindre les limites de la capacité de stockage disponible en mémoire centrale. Il paraît hors de question avec les ordinateurs actuels de calculer les corrélations distance - vitesse à D = 3 sans enregistrer les résultats intermédiaires sur disque, puis les rappeler... etc ... ce qui implique une structure très lourde des programmes de diagnostic. De plus, la visualisation des résultats est alors extrêmement malaisée.
- Enfin le surcroît "d'investissement" n'est pas seulement lourd en temps programmeur, il l'est aussi en temps - machine. Les deux simulations en 3D existantes de ce type font soit appel à d'énormes moyen de calcul (4h de CPU CRAY pour une exécution), soit se déroulent dans des conditions numériquement défavorables (1 macroparticule par maille!) et avec peu de résolutions (l'espace est découpé en 32^3 cellules : Klypin et Shandarin 1983).

Cependant tous les arguments précédents seraient de peu de poids s'il ne pouvait y avoir de résultats intéressants qu'à D = 3. Car, s'il est clair qu'on ne peut s'attendre à trouver une loi de puissance d'exposant - 1.8 pour ξ, on va pouvoir par contre, tester l'émergence ou non, d'une loi de puissance suivant le type de conditions initiales et suivre l'évolution temporelle des corrélations. Enfin le problème de la dimension n'est pas crucial pour tester la dépendance fonctionnelle de la vitesse relative, de la température , du flux de chaleur...

Avant de passer à l'étude détaillée du code, il est important de souligner un des avantages fondamentaux de ce type d'algorithme génériquement appelé PIC (Particule In Cell). Pour assurer le caractère non collisionnel, toutes les quantités physiques sont, nous l'avons vu, calculées sur une grille et on peut montrer que le nombre d'opérations pour calculer le champ sur cette grille croît avec le nombre N_g de points de grille comme $Ng^2 \log Ng^2$ (pour D = 2). Par contre l'avancement des particules requiert un nombre d'opérations qui croit comme le nombre N_p de ces particules. Dès que N_p est assez grand, le temps de calcul des champs perd de l'importance et le temps total d'un pas de temps croit en première approximation comme N_p. Cette dépendance linéaire permet le maniement d'un nombre énorme de particules (jusqu'à 1 Million) contrairement aux codes collisionnels simples* où la force est calculée par sommation directe de toutes les interactions binaires. En effet le temps de calcul croit alors comme N_p^2 et le nombre maximal de particules est de l'ordre de 5000. Ces codes (de type Aarseth où PP pour Particule-Particule) sont cependant irremplaçables pour l'étude des structures à petite échelle (formation de Binaires par exemple) où les "collisions" sont importantes.

Ce code PIC est conçu (voir figure II) en deux parties bien distinctes, mais de nombre de cartes et de temps de mise au point à peu près identiques.

- Dans unepremière partie, le programme dit "principal" génère des conditions initiales données, puis fait évoluer dans le temps la distribution des particules. L'ensemble des positions et des vitesses de toutes les particules est alors périodiquement stocké, ce qui crée une série de "catalogues", à des temps différents, qui résultent des conditions initiales imposées. Ce programme principal est immédiatement suivi d'un programme annexe qui a pour but de tracer sous forme de graphiques l'évolution de tous les paramètres indicateurs de bon déroulement de l'exécution du précédent. L'étude détaillée de cette partie fait l'objet du paragraphe 2.

---

*Hockney et Eastwood (Hockney et Al. 1973, Eastwood 1975, Eastwood et Al. 1974, 1980) ont développé un code qu'ils appellent P^3M (Particle-Particle/Particle-Mesh) où les interactions à grande distance sont calculées sur une grille et où les interactions binaires à courte distance sont prises en compte par sommation directe. Ce code binaire collisionnel peut manipuler un très grand nombre de particules. C'est celui utilisé par Efstathiou.

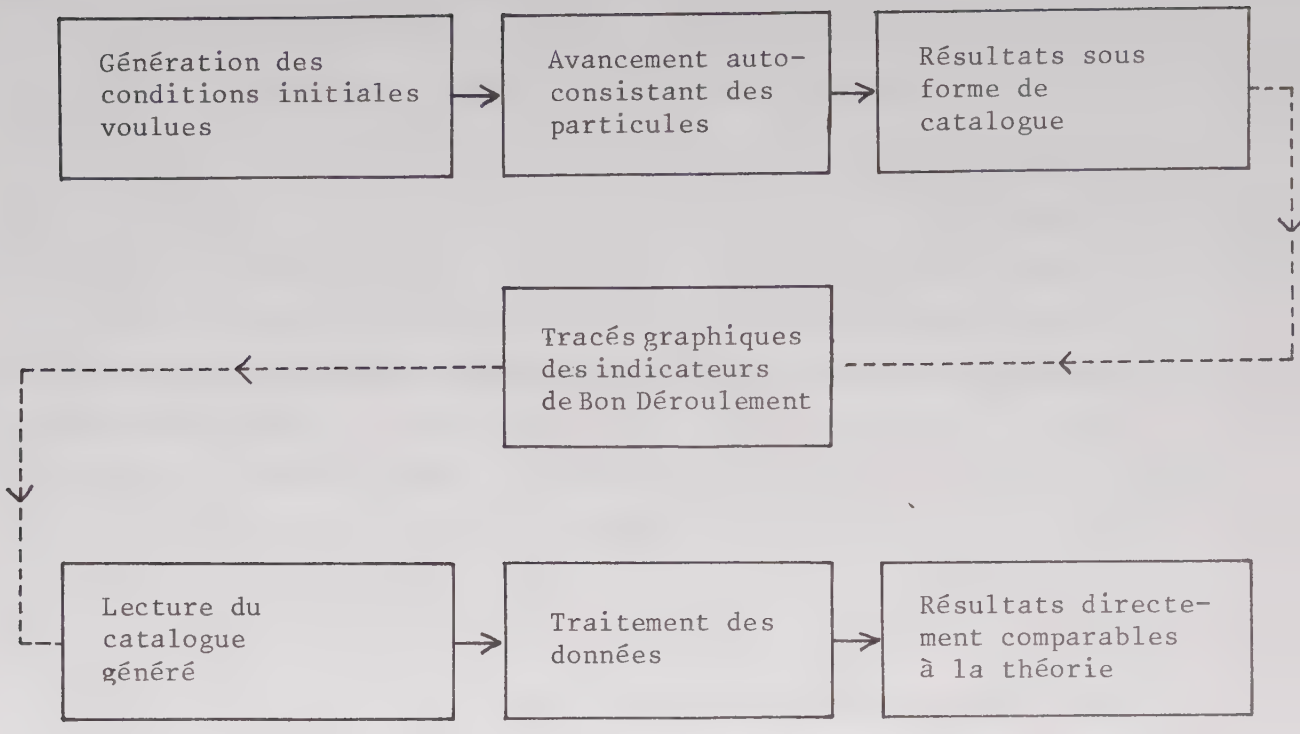


Figure II

- la seconde partie, totalement indépendante, fait l'analyse des catalogues générés, de manière relativement identique à celle d'un catalogue réel de galaxies. On peut se contenter d'une "photographie" instantanée de la distribution, ou de contours isodensité. On peut aussi calculer les diverses fonctions de corrélation, y compris les corrélations distance-vitesse puisqu'on dispose de toute l'information, ce qui n'est pas le cas d'un catalogue réel. On peut enfin étudier l'évolution temporelle, en particulier celle de ξ (ou Ψ). Cette seconde partie sera présentée au paragraphe 3, Le paragraphe 4 étant réservé à la discussion des résultats.

2) Réalisation d'un code PIC

Ce paragraphe est destiné à présenter et justifier les choix faits au cours de la réalisation des différents étapes (voir figure III) du programme principal. En 2-a) sont examinés tous les problèmes concernant l'intégration spatiale des équations, c'est-à-dire l'obtention de la force agissant sur chaque particules à partir de leur distribution. Le 2-b) est consacré à l'intégration temporelle des équations, c'est-à-dire à l'avancement des particules et aux problèmes liés à un pas de temps variable (la force de l'interaction Ga croissant avec le temps, il faut diminuer le pas de temps au cours de l'évolution). Nous présentons en 2-c) les structures "annexes" qui "initialisent" le code, réalisent les divers diagnostics et assurent les procédures de sauvetage des données qui permettent de redémarrer une exécution en un point donné après une interruption. Par contre, la génération des conditions initiales "physiques" (spectre de fluctuation) sera présentée,en même temps que les résultats correspondants,au § 4. La figure X résume l'enchainement détaillé de toutes ces opérations.

a) Intégration spatiale des équations

Le schéma global choisi est tel qu'il conserve l'impulsion totale. Il existe aussi des schémas (Lewis 1970) qui ne passent pas par l'intermédiaire du champ. Ils ont l'avantage de conserver l'énergie dans la limite d'un pas de temps tendant vers zéro. Malheureusement cette conservation exacte disparait quand on passe à l'approximation aux différences finies ($DT \neq 0$). De plus il apparait une "auto-force" des particules sur elles-mêmes et l'impulsion totale n'est plus conservée. C'est pourquoi nous utiliserons le schéma "classique" bien qu'il ne conserve pas exactement l'énergie (mauvaise prise en compte des longueurs d'onde de l'ordre de la maille). Pour plus de détails sur ce schéma global ainsi que sur la réalisation des diverses étapes, on pourra utilement se reporter aux livres de référence de Potter (1973) et de Hockney et Eastwood (1981).

L'affectation de la masse des particules aux points de grille

est la première étape du calcul. La façon de procéder la plus simple et la moins couteuse consiste à affecter toute la masse de la particule au point de grille le plus proche (Voir figure IV). La fonction qui donne la valeur assignée au point de grille i par la particule sise en x, qui est appelée

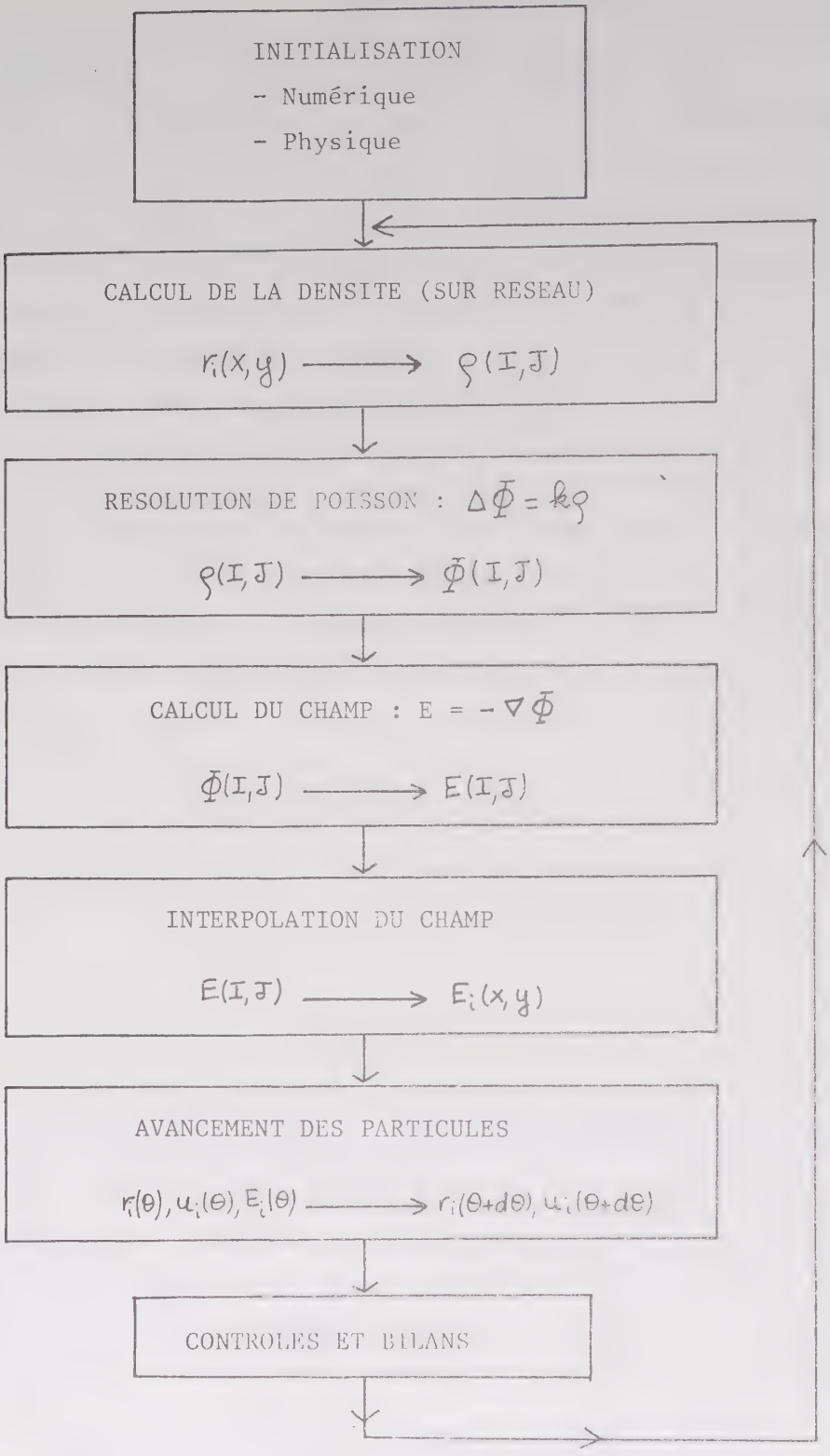


Figure III : Seules les positions et les vitesses sont des quantités continues. Toutes les autres quantités sont définies sur une grille dont les noeuds sont repérés par deux indices I,J (pour D = 2).

fonction de forme $h(x-x_i)$, est alors en 1D un simple créneau*. Cette affectation NGP (Nearest Grid Point) n'est évidemment pas continue et pour une particule équidistante de deux points de grille, une variation infinitésimal de sa position change totalement son affectation et donc affecte sensiblement le calcul de la force, ce qui n'est guère désirable.

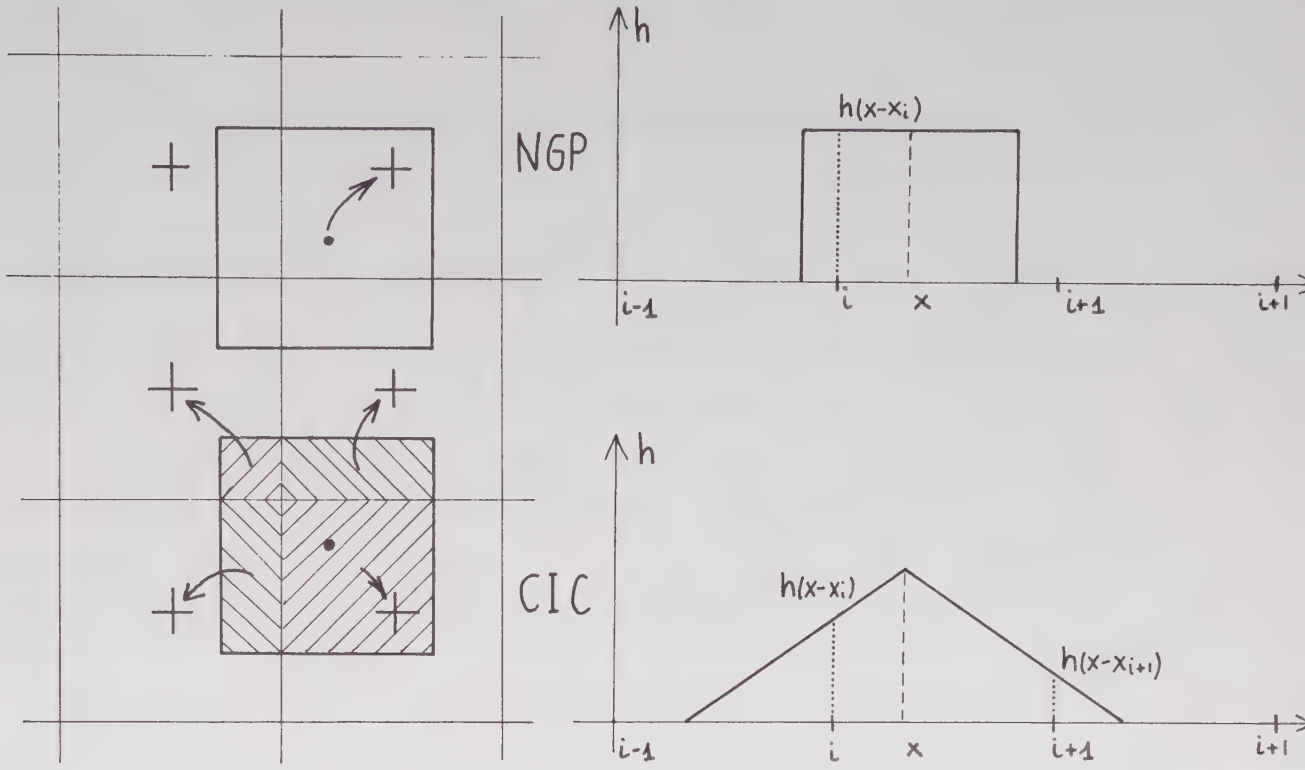


Figure IV : Comparaison des affectations NGP et CIC à D = 2, avec (à droite) les fonctions de forme 1D correspondantes.

Nous avons choisi le schéma d'ordre supérieur dit CIC (Pour Cloud In Cell) qui affecte la masse selon une interpolation bilinéaire (à 2D) entre les points les plus proches. La fonction de forme est alors continue et a la forme d'un triangle. Le nom de ce schéma d'affectation vient du fait que l'on peut visualiser l'opération en donnant à la particule la forme d'un nuage de la taille de la maille . La fraction de la masse assignée à chaque point est donnée par l'aire de la maille recouverte par le nuage. Il existe bien sûr des schémas d'ordre supérieur dont le premier est le TSC (Triangular Shape Cloud) qui répartit la masse sur 9 points (en 2D) et qui

* à D = 2 ou D = 3, la fonction de forme est alors le produit de fonction de forme à 1D.

assure la continuité de la dérivée première de h*. Evidemment plus l'ordre du schéma augmente (ce qui correspond à garder de plus en plus de terme d'un développement multipolaire) et plus celui-ci est coûteux. L'affectation CIC est largement utilisée aujourd'hui en raison de son bon compromis cout-précision. Elle est effectuée dans ce code par une partie du sous-programme MOVE 2V.

Le calcul du potentiel qui résulte de la densité calculée précédemment nécessite la résolution de l'équation de Poisson. Il existe un grand nombre de méthodes pour résoudre les équations différentielles du second ordre et une vaste littérature a été consacrée au sujet. Cependant notre problème a un certain nombre de spécificités qui permettent l'utilisation d'algorithmes particulièrement rapides. En effet, l'équation de Poisson est linéaire, séparable, et à coefficients constants. De plus, désirant simuler l'Univers infini, nous utilisons des conditions aux limites périodiques, ce qui est possible puisque la "masse" totale (source du champ) est nulle (apparition d'un fond neutralisant $\bar{\rho}$ en coordonnées comobiles). Trois méthodes ont été développées pour tirer pleinement parti de ces spécificités et résoudre rapidement l'équation de Poisson sous forme discrète** (en 1 dimension).

$$\bar{\Phi}_{i+1} - 2\bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_{i+1} = \rho_i$$

où $\bar{\Phi}_i$ représente le potentiel au noeud i et ρ_i est la densité multiplée par une constante spatiale (qui vaut ici $2\Delta^2/\theta^2$, où Δ est la distance entre les noeuds).

- la première, appelée Réduction Cyclique est due, sous sa forme numériquement stable à Buneman (1969). Il s'agit (Voir figure V) de relier par une transformation simple le potentiel en i au potentiel aux points i+2 et i-2 (et non i+1 et i-1), ce qui permet de diviser par deux le nombre d'équations à chaque reduction. Prenons 3 équations consécutives :

---

* la force calculée est aussi plus isotrope. Cependant pour un CIC, l'anisotropie est déjà inférieure à 5 pour cent.

**
$$\Delta_{x_i}\bar{\Phi} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\bar{\Phi}}{dx}\right)\Big|_{x_i} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{d\bar{\Phi}}{dx}\Big|_{x_i+\Delta/2} - \frac{d\bar{\Phi}}{dx}\Big|_{x_i-\Delta/2}\right] = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\bar{\Phi}_{i+1}-\bar{\Phi}_i}{\Delta} - \frac{\bar{\Phi}_i-\bar{\Phi}_{i-1}}{\Delta}\right]$$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{i-2} - 2\bar{\Phi}_{i-1} + \bar{\Phi}_i = \rho_{i-1} \\ \bar{\Phi}_{i-1} - 2\bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_{i+1} = \rho_i \\ \bar{\Phi}_i - 2\bar{\Phi}_{i+1} + \bar{\Phi}_{i+2} = \rho_{i+1} \end{cases}$$

qu'on additionne en multipliant la seconde par deux, ce qui donne l'équation de même type :

$$\bar{\Phi}_{i-2} - 2\bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_{i+2} = \rho_i^{(1)} \quad , \quad \rho_i^{(1)} = \rho_{i-1} + 2\rho_i + \rho_{i+1}$$

On peut alors répéter l'opération sur le système réduit jusqu'à ce qu'on ait (pour un nombre pair n de points de grille) :

$$\bar{\Phi}_0 - 2\bar{\Phi}_{n/2} + \bar{\Phi}_n = \rho_i^{(t)}$$

Choisissant (par exemple) les conditions aux limites $\Phi_0 = \Phi_n = 0$, on obtient $\Phi_{n/2}$ ce qui, en répétant les opérations dans l'autre sens (opération de "dépliement") permet de remonter aux valeurs du potentiel en chaque point .

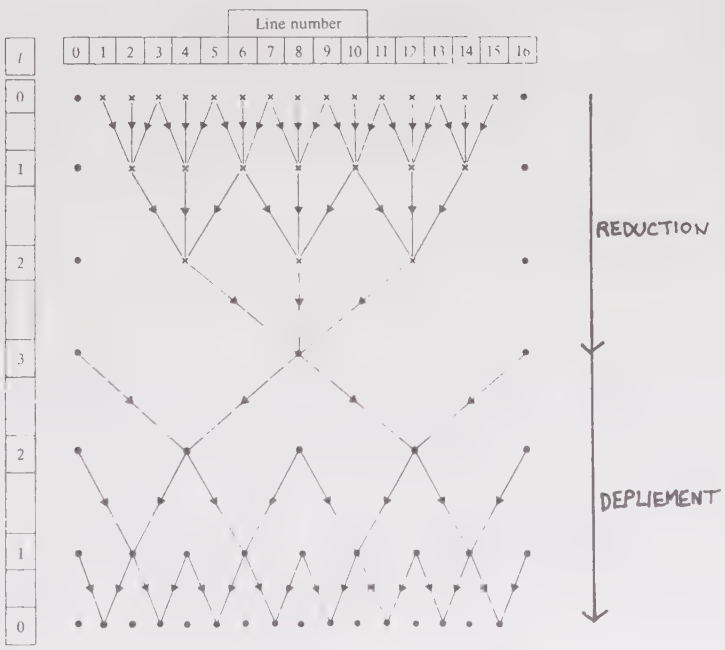


Figure V : Les flèches indiquent les valeurs calculées à chaque niveau de réduction. Les cercles noirs correspondent aux valeurs qui sont connues (extrait de Hockney et Eastwood (1981)).

A D= 2, le laplacien, pour des mailles carrées est un opérateur à 5 points :

$$\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1} = \rho_{i,j}$$

Le principe de résolution est alors identique, mais il faut, dans ce cas procéder à une *double* réduction cyclique,une dans la direction x et l'autre dans la direction y.

- la seconde méthode consiste à faire une expansion en double *série* de Fourier (à D = 2) de la densité (grâce à un algorithme performant dit FFT (Fast Fourier Transform) qui évite de calculer tous les cosinus et les sinus). Il suffit alors de multiplier les amplitudes de Fourier de la densité $\hat{\rho}_{k,\ell}$ par la fonction de Green discrète $\hat{G}_{k,\ell}$ tabulée une fois pour toute. A titre d'exemple, en 1D on a :

$$\Phi_j = \Phi(x_j) = \sum_k \hat{\Phi}_k e^{ikx_j} \quad , \quad \rho_j = \sum_k \hat{\rho}_k e^{ikx_j} \quad \left(x_j = j\Delta, k = \frac{2n}{n\Delta/\kappa}\right)$$

Et en remplaçant dans l'équation de Poisson :

$$\sum_k \hat{\Phi}_k \left(e^{ik\Delta} - 2 + e^{-ik\Delta}\right) e^{ikx_j} = \sum_k \hat{\rho}_k e^{ikx_j}$$

On tire la fonction de Green correspondante pour $k \neq 0$:

$$\hat{G}_k = \left[2(\cos k\Delta - 1)\right]^{-1} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi\kappa}{n} - 1\right)\right]^{-1}$$

Incidemment, l'analyse en mode de Fourier permet d'établir la précision de l'approximation discrète des opérateurs différentiels. Nous venons de voir que l'approximation discrète du laplacien, qu'on note Δ^d, s'écrivait pour le mode k du potentiel :

$$\Delta^d \hat{\Phi}_k e^{ikx_j} = \frac{2}{\Delta^2} \cos(k\Delta - 1)\, \hat{\Phi}_k e^{ikx_j}$$

et dans la limite des grandes longueurs d'onde devant la maille ($k\Delta \ll 1$) on peut développer le cosinus et écrire :

$$\Delta^d \hat{\Phi}_k e^{ikx_j} = -k^2 \left[1 - \frac{k^2\Delta^2}{12} + O(k^4\Delta^4)\right] \hat{\Phi}_k e^{ikx_j}$$

tandis que pour l'opérateur différentiel on a :

$$\Delta \bar{\Phi}_k e^{ikx} = -k^2 \bar{\Phi}_k e^{ikx}$$

ce qui montre que les approximations discrètes ne sont pas bonnes pour les longueurs d'onde de l'ordre de la maille.

- La troisième méthode (Hockney 1970) est extrêmement rapide et consiste à faire une transformée de Fourier dans une direction puis à résoudre séparément pour chaque mode de Fourier* par une réduction cyclique ce qui permet de prendre en compte facilement des conditions aux limites périodiques. Une fois terminée la phase de "dépliement", la résolution est achevée en retransformant de Fourier en sens inverse (synthèse de Fourier).
Cette méthode est la plus rapide actuellement sur un ordinateur scalaire C'est celle que nous utilisons. Il est de plus possible de commencer par un ou plusieurs (r) niveaux de réductions cycliques dans la direction où l'on fait l'analyse de Fourier. La longueur des vecteurs qu'il faut transformer est alors réduite de 2^r, ce qui peut permettre de gagner du temps sur la résolution globale. Hockney (voir figure VI) parvient à un optimum pour r = 2. Cependant cet optimum dépend de façon sensible de la Transformée de Fourier utilisée (il s'agit de comparer le surcroît de temps passé à effectuer une réduction cyclique et le gain de temps dû au fait que les vecteurs à transformer sont plus "courts"). Or les transformations de Fourier que nous utilisons ont des performances supérieures aux siennes (de l'ordre de 40 % plus rapides). Dans ce cas, le minimum de la figure VI, s'il existe, est nettement moins marqué. De plus, la structure que cela impose au programme de résolution de Poisson le rend difficilement vectorisable (dans l'éventualité du Passage sur CRAY du Programme).C'est pourquoi

---

*Ecrivant la transformation de Fourier discrète sur une direction de la manière suivante :

$$\bar{\Phi}_{i,j} = \sum_k \hat{\bar{\Phi}}_i(k) e^{ikx_j} \quad , \quad \rho_{i,j} = \sum_k \hat{\rho}_i(k) e^{ikx_j}$$

l'équation de Poisson s'écrit sur chaque mode de Fourier

$$\hat{\bar{\Phi}}_{i+1}(k) - (4 - 2\cos k\Delta)\hat{\bar{\Phi}}_i(k) + \hat{\bar{\Phi}}_{i-1}(k) = \hat{\rho}_i(k)$$

la résolution de ce système revient bien, là encore, à inverser une matrice tridiagonale.

nous utilisons un algorithme sans réduction cyclique précédant la transformation de Fourier, ce qui correspond au point entouré d'un cercle sur la figure VI :

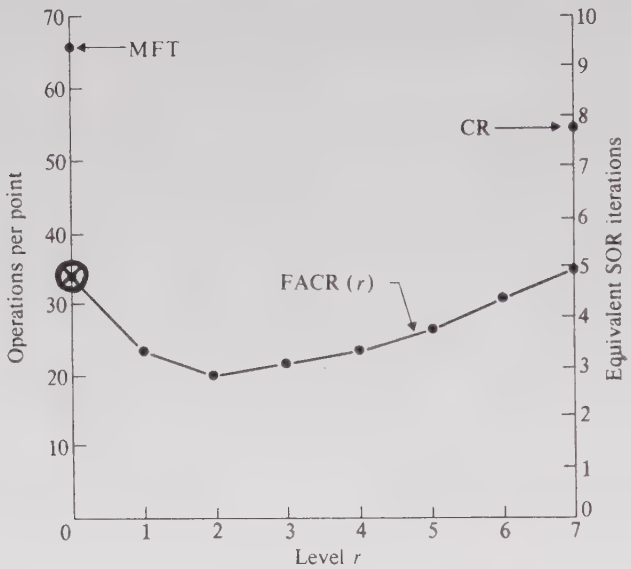


Figure VI : Nombre d'opérations par point de grille pour résoudre l'opération de Poisson (pour une grille 128^2). Le Point noté CR correspond à une double réduction cyclique, celui noté MFT à une résolution par double transformation de Fourier et les points de la courbe correspondent à la 3ème méthode précédée de r réduction cyclique. Notre sous-programme correspond donc au point entouré (r=0)

(Extrait de Hockney, 1970)

Cette résolution de l'équation de Poisson est effectuée par le sous programme POT3, la tabulation des coefficients qui interviennent dans la phase de réduction cyclique qui suit l'analyse de Fourier étant effectuée une fois pour toute par le sous programme SETPT3.

Les composantes du champ sur la grille sont calculées par la discrétisation de l'opérateur gradient. En 1D on a :

$$\begin{cases} \bar{\Phi}(X+\Delta) = \bar{\Phi}(X) + \Delta \partial_x \bar{\Phi} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}}{\partial x^3} + O(\Delta^4) \\ \bar{\Phi}(X-\Delta) = \bar{\Phi}(X) - \Delta \partial_x \bar{\Phi} + \frac{\Delta^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}}{\partial x^3} + O(\Delta^4) \end{cases}$$

Et donc :

$$\bar{\Phi}(X+\Delta) - \bar{\Phi}(X-\Delta) = 2\Delta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{\Delta^3}{3} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}}{\partial x^3} + O(\Delta^5) \qquad (1)$$

le schéma numérique le plus simple est évidemment la schéma à deux points suivant :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \equiv \frac{\bar{\Phi}(X+\Delta) - \bar{\Phi}(X-\Delta)}{2\Delta}$$

qui est exact au terme en Δ^2 près. Mais en différenciant sur 4Δ au lieu de 2Δ, on a aussi, d'après (1) :

$$\bar{\Phi}(X+2\Delta) - \bar{\Phi}(X-2\Delta) = 4\Delta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + 8 \frac{\Delta^3}{3} \frac{\partial^3 \bar{\Phi}}{\partial x^3} + O(\Delta^5) \qquad (2)$$

La combinaison de (1) et (2) permet d'écrire le schéma à 4 points suivant :

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \equiv \alpha \frac{\bar{\Phi}(X+\Delta) - \bar{\Phi}(X-\Delta)}{2\Delta} + (1-\alpha) \frac{\bar{\Phi}(X+2\Delta) - \bar{\Phi}(X-2\Delta)}{4\Delta} + \left(\frac{\alpha}{6} + \frac{2(1-\alpha)}{3} \right) \Delta^2 \frac{\partial^3 \bar{\Phi}}{\partial x^3} + O(\Delta^4)$$

Le choix de $\alpha = 4/3$ permet alors d'avoir un schéma exact au terme en Δ^4 près. L'utilisation de ce schéma à 4 points permet, d'après nos essais, d'améliorer d'un facteur deux la conservation de l'énergie par le code. Bien qu'il soit légèrement plus coûteux c'est donc lui que nous utilisons, et le sous-programme CHAMPS exécute le calcul suivant :

$$\begin{cases} 2\Delta E_x(I,J) = -\frac{4}{3} \left[\bar{\Phi}(I+1,J) - \bar{\Phi}(I-1,J) \right] + \frac{1}{6} \left[\bar{\Phi}(I+2,J) - \bar{\Phi}(I-2,J) \right] \\ 2\Delta E_y(I,J) = -\frac{4}{3} \left[\bar{\Phi}(I,J+1) - \bar{\Phi}(I,J-1) \right] + \frac{1}{6} \left[\bar{\Phi}(I,J+2) - \bar{\Phi}(I,J-2) \right] \end{cases}$$

L'interpolation du champ aux positions exactes des particules

est faite de façon analogue à l'affectation de ces particules aux points de grille. On a donc le choix entre les interpolations NGP, CIC, TSC ... Nous avons, là encore, choisi le schéma CIC (interpolation bilinéaire entre les quatre points (à D=2) de grille les plus proches), ce qui permet d'assurer la conservation numérique (aux erreurs d'arrondi machine près) de la quantité de mouvement totale. En effet, tout code PIC qui utilise une fonction de forme $h(x-x_i)$ pour l'affectation des particules et une fonction d'interpolation $f(x-x_i)$ identique ($f \equiv h$) conserve l'impulsion globale pourvu que le schéma de différentiation numérique utilisé pour calculer le champ sur la grille soit "centré" (utilisant symétriquement les valeurs "de part et d'autre" du point de calcul). En 1D, la somme des équations particulaires donne la relation :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{dx_j}{dt}\right) = \frac{d\mathcal{P}}{dt} = -\sum_j E(x_j)$$

où $E(x_j)$ est le champ "interpolé", à l'endroit où se trouve la particule à partir des champs sur la grille $E(x_g) \equiv E_g$, à l'aide de la fonction $f(x-x_g)$:

$$E(x_j) = \sum_g f(x_j - x_g) E_g$$

La densité sur un point de grille $\rho(x_g) \equiv \rho_g$ est calculée grâce à :

$$\rho_g = \sum_i h(x_i - x_g)$$

Si les schémas choisis pour représenter le laplacien et le gradient sont spatialement centrés (ce qui est le cas des schémas à 5 et 4 points précédents), les matrices [G] et [D] qui représentent ces opérateurs sont respectivement symétrique et antisymétrique et on a

$$[G][\Phi] = [\rho] \quad , \quad [E] = [D][\Phi] = [D][G^{-1}][\phi] = [A][\Phi]$$

et donc sur les composantes :

$$E_g = \sum_{g'} a_{gg'} \rho_{g'} \quad \text{avec} \quad a_{gg'} = - a_{g'g}$$

Ce qui donne, avec les notations précédentes :

$$\sum_j E(x_j) = \sum_{jg} f(x_j - x_g) E_g = \sum_{jgg'} f(x_j - x_g) a_{gg'} \rho_{g'}$$

$$\sum_j E(x_j) = \sum_{i,j,g,g'} f(x_j - x_g) a_{gg'} h(x_i - x_g)$$

L'identité de f et h est donc suffisante pour assurer la conservation du moment:

$$\frac{d\mathcal{P}}{dt} = - \sum_j E(x_j) = 0$$

et on vérifie bien qu'il n'existe pas dans ce cas d'"Autoforce", c'est-à-dire de force sur elle même d'une particule :

$$E_{auto}(x) = \sum_g h(x - x_g) E_g$$

$$E_{auto}(x) = \sum_{gg'} h(x - x_g) a_{gg'} h(x - x_{g'}) = 0$$

la conservation de l'impulsion totale (aux erreurs d'arrondi près) sera donc un bon indicateur du déroulement correct du programme (cf c)). L'interpolation du champ est effectué dans le sous programme MOVE2V qui regroupe toutes les opérations portant sur les particules (Interpolation des champs - Avancement de particules - Nouvelle affectation de densité).

Une fois exécutées toutes les étapes précédentes qui conduisent aux valeurs du champ en chaque point à partir de la position des particules, il suffit d'intégrer les équations du mouvement ("avancer" les particules) pour compléter un pas de temps.

b) Intégration temporelle des équations

Le schéma d'intégration utilisé est le schéma numériquement stable le plus simple. Il est appelé "saute-mouton" (Voir figure VII) car les positions des particules sont définies aux temps entiers (i.e. aux multiples entiers du pas de temps DT) alors que leurs vitesses sont définies aux temps demi-entiers, ce qui permet de centrer et la dérivée de la position, et celle de la vitesse.

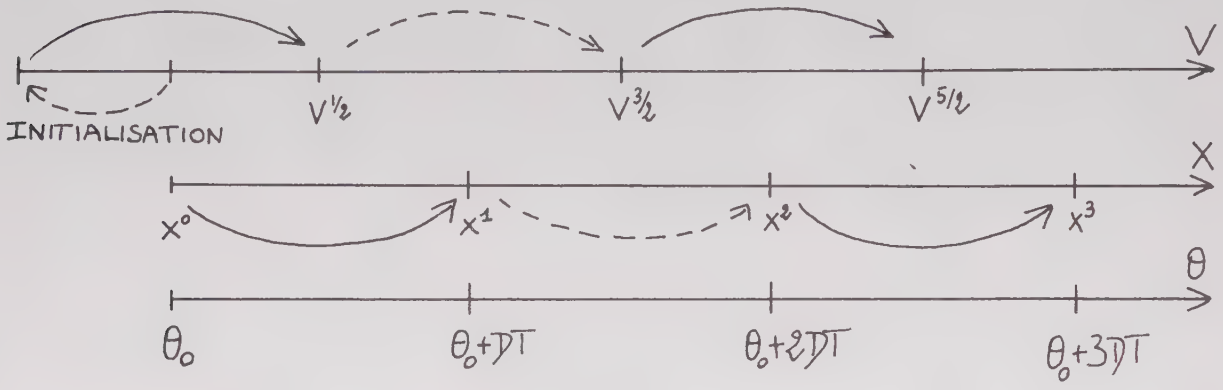


Figure VII

Afin de définir des dérivées centrées, on écrit :

$$\begin{cases} X^{n+1} - X^{n+1/2} = \dfrac{\partial X}{\partial t}^{n+1/2} \dfrac{DT}{2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}^{n+1/2} \dfrac{DT^2}{8} + O(DT^3) \\ X^{n} - X^{n+1/2} = -\dfrac{\partial X}{\partial t}^{n+1/2} \dfrac{DT}{2} + \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} \dfrac{DT^2}{8} + O(DT^3) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} X^{n+1} - X^{n} = \dfrac{\partial X}{\partial t}^{n+1/2} DT + O(DT^3) \\ V^{n+1/2} - V^{n-1/2} = \dfrac{\partial V}{\partial t}^{n} DT + O(DT^3) \end{cases}$$

d'où les équations suivantes :

$$\begin{cases} V^{n+1/2} = V^{n-1/2} + E^{n} DT \\ X^{n+1} = X^{n} + V^{n+1/2} DT \end{cases}$$

qui sont exactes au terme d'ordre supérieur ou égal à $\mathcal{D}T^3$ près. Elles définissent le schéma saute-mouton.
Ce déplacement des particules est effectué par le sous-programme MOVE2V qui regroupe, comme nous l'avons dit, les opérations portant sur les particules et doit donc être optimisé au mieux*.

Les intervalles de discrétisation Δ et DT sont des unités numériques naturelles. Leur utilisation systématique permet d'éviter un grand nombre d'opérations inutiles. En effet le modèle numérique auquel nous avons abouti (dans le cas le plus simple où le gradient est un opérateur à deux points et D = 1) est résumé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{\Phi}_{i+1} - 2\bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_{i-1}}{\Delta^2} = \dfrac{2D}{\theta^2}\delta\rho_i \,, \quad \delta\rho_i = \dfrac{\sum_j h(x_j - x_i) - \bar{N}}{\bar{N}} \\ E_i = \dfrac{\bar{\Phi}_{i+1} - \bar{\Phi}_{i-1}}{2\Delta} \,, \quad E(x) = \sum_i h(x - x_i) E_i \\ V^{n+1/2} = V^{n-1/2} + E^n(x)\, DT \,, \quad X^{n+1} = X^n + V^{n+1/2} DT \end{cases}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{cases} \dfrac{DT^2}{2\Delta^2}\left(\bar{\Phi}_{i+1} - 2\bar{\Phi}_i + \bar{\Phi}_{i-1}\right) = \dfrac{D}{\theta^2}\dfrac{DT^2}{\bar{N}}\left(\sum_j h(x_j - x_i) - \bar{N}\right) \\ E_i \dfrac{DT^2}{\Delta} = \dfrac{DT^2}{2\Delta^2}\left(\bar{\Phi}_{i-1} - \bar{\Phi}_{i+1}\right) \\ V^{n+1/2}\dfrac{DT}{\Delta} = V^{n-1/2}\dfrac{DT}{\Delta} + E^n(x)\dfrac{DT^2}{\Delta} \,, \quad \dfrac{X^{n+1}}{\Delta} = \dfrac{X^n}{\Delta} + V^{n+1/2}\dfrac{DT}{\Delta} \end{cases}$$

*Pour une exécution comportant 1000 pas de temps avec 500 000 particules, cette série d'opérations est effectuée 5 10^8 fois . L'ordinateur IBM 370/168 du CIRCE a une rapidité de quelques Mflop (1Mflop = 10^6 opérations en réel par seconde).

On définit donc les "variables machine" adimensionnelles suivantes :

$$\hat{X}=\frac{X}{\Delta},\ \hat{V}=V\frac{DT}{\Delta},\ \hat{E}=E\frac{DT^2}{\Delta},\ \hat{\Phi}=\Phi\frac{DT^2}{2\Delta^2},\ \hat{\rho}=\hat{G}(N_i-N),\ \hat{G}=\frac{D}{\bar{N}}\frac{DT^2}{\theta^2}$$

Les "équations machine" , dont la généralisation à D = 2 est évidente, s'écrivent alors simplement :

$$\begin{cases}
\hat{\rho}_i=\hat{G}\left(\sum_j h(x_j-x_i)-\bar{N}\right)\\
\hat{\Phi}_{i+1}-2\hat{\Phi}_i+\hat{\Phi}_{i+1}=\hat{\rho}_i\\
\hat{E}_i=\hat{\Phi}_{i-1}-\hat{\Phi}_{i+1}\\
\hat{E}(x)=\sum_i h(x-x_i)\hat{E}_i\\
\hat{V}^{n+1/2}=\hat{V}^{n-1/2}+\hat{E}^n(x)\\
\hat{X}^{n+1}=\hat{X}^n+\hat{V}^{n+1/2}
\end{cases}$$

On remarque alors que "l'avancement" d'une particule une fois calculé le champ interpolé, ne nécessite que deux additions (et des transferts). Afin d'avoir un schéma centré dès les départ, le sous-programme SETV recule d'un demi pas de temps les vitesses initiales des particules, sans toucher à leur position. Comme au cours de l'exécution de MOVE2V les particules peuvent sortir de la "boîte", le sous-programme RHOCAL applique alors les conditions aux limites périodiques avant de calculer la densité normalisée $\hat{\rho}_i$ en enlevant le "fond neutralisant" $\bar{N}$ et en multipliant par la constante de force de l'interaction "normalisée" $\hat{G}=\frac{D\ DT^2}{\bar{N}\theta^2}$

Du fait du système de coordonnées choisi, $\hat{G}$ croît avec le temps ($\hat{G}\propto Ga$, $a\propto\theta^{-2}$, $\theta\to 0$ quand $t\to\infty$) et les particules soumises à un potentiel attractif voient leur vitesse croître. Il va donc falloir vérifier à chaque "avancement" que le pas de temps est suffisamment petit (cf. c), sous-programme DTVRIF), et le diminuer périodiquement en conséquence. Certains auteurs (Klypin et Shandarin, 1982) utilisent un pas de temps

continûment variable ($DT^n/DT^{n-1} = 0,93$) ce qui les oblige à utiliser un schéma décentré (du type "prédictor-corrector"), qui, pour parvenir à la même précision (en $O(D\,T^3)$) que le "saute-mouton" standard nécessite un plus grand nombre d'opérations. Melott (1982a,b,c)utilise lui aussi un pas de temps continûment variable, tout en conservant un schéma type saute-mouton qui n'est donc plus centré pour les vitesses. Pour éviter cet écueil Frenk, White et Davis (Communication privée) ont décidé de reprendre le code d'Efstathiou sans changement. Ils utilisent donc les variables comobiles "simples" (en conservant le temps physique t), ce qui a l'avantage de permettre de travailler à pas de temps constant. Par contre, les opérations du mouvement comporte alors un terme supplémentaire de "force visqueuse" (une particule libre ($\Phi = 0$) voit sa vitesse propre décroître comme 1/a) ce qui implique là aussi un surcroit d'opérations par particule.

Nous avons choisi une procédure différente qui consiste chaque fois que cela est nécessaire* à *diviser le pas de temps par deux*. Dans ce cas l'avancement des particules est effectué par un sous-programme spécial (DTCHGE) qui se substitue à MOVE2V et renormalise les vitesses machine ($\hat{V} = VDT/\Delta$). Il serait évidemment possible d'utiliser à cette occasion un schéma de type "predictor-corrector". Cependant un simple "saute-mouton" utilisé avec précaution permet d'avoir encore une dérivée centrée pour l'avancement des positions (Voir figure VIII) et donc un schéma en $O(DT^3)$ Pour cela, il faut faire une interpolation linéaire sur les vitesses (pour les avancer de $\frac{3DT}{4}$) qui sont alors calculées avec un ordre de moins pour ce pas de temps ($v^{n+1/4} = v^{n-1/2} + E^m \frac{3DT}{4} + O(DT^2)$)

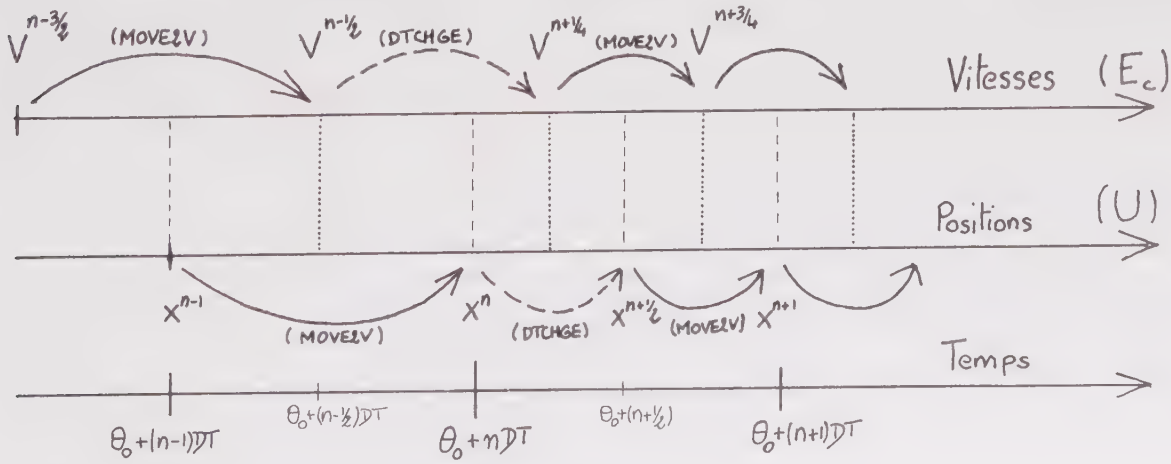


Figure VIII

*En pratique, environ tous les 10 pas de temps ce qui correspond bien à 10 réductions successives telles que $DT/DT_{n-1} \sim 0.93$ ($0.93^{10} \sim 0.48$).

Il reste encore une équation différentielle que nous désirons intégrer, c'est l'équation de conservation de l'énergie :

$$\partial_\theta (E_c + U) = h U$$

qui va nous servir d'indicateur de contrôle de bon déroulement. Mais remarquons tout d'abord que ce type de code, même dans la limite de pas de temps nul, *ne conserve pas exactement l'énergie*. En effet toutes les longueurs d'onde inférieures à Δ sont "coupées" et celles de l'ordre de la maille sont, comme nous l'avons vu, mal prises en compte par le code. On est précisément dans la situation défavorable où l'interaction étant attractive, on forme des structures qui collapsent sur elles-mêmes. La croissance des courtes longueurs d'onde qui s'en suit peut être mal traduite par ce type de code. L'amplitude de la violation de cette relation de conservation va donc nous renseigner sur le "comportement" du code et, conjointement avec d'autres indicateurs (cf. § c suivant), indiquer si les résultats obtenus jusqu'à un temps donné sont crédibles.

L'énergie cinétique est calculée par sommation directe des carrés des vitesses des particules (et réexprimée en unités physiques). Elle est donc définie au temps demi entiers. L'énergie potentielle par contre est calculée par l'intégrale du produit des fluctuations de densité par le potentiel, pris sur les points de grille et qui sont définis (comme les positions) aux temps entier. Le bilan est fait au temps entiers. Pour calculer une dérivée centrée il faut donc évaluer (par interpolation) le potentiel aux temps demi entiers. On a :

$$\frac{(E_c + U)^{n+1/2} - (E_c + U)^{n-1/2}}{DT} = h^n U^n$$

Soit encore :

$$\left(E_c^{n+1/2} + \frac{U^{n+1} + U^n}{2}\right) - \left(E_c^{n-1/2} + \frac{U^n + U^{n-1}}{2}\right) - h^n DT^n U^n = 0$$

Et sommant cette relation, on a :

$$\left(E_c^{n+1/2} + \frac{U^{n+1} + U^n}{2}\right) - \left(E_c^{1/2} + \frac{U^1 + U^0}{2}\right) - \sum_{n=1}^{N} h^n DT^n U^n = 0 \qquad (2)$$

(1) et (2) testent donc la violation instantanée et intégrée de la conservation de l'énergie. En fait, dans le code, on désire évaluer des quantités relatives. En effet, au cours de l'exécution ces énergies peuvent augmenter d'un facteur pouvant atteindre 10^7, et ce qui est intéressant c'est l'amplitude de la violation comparée aux énergies mises en jeu (il y a 6 chiffres significatifs en simple précision IBM). Les trois termes (Cinétique, Potentiel et d'expansion) sont de même ordre et nous avons choisi comme point de comparaison l'énergie potentielle au temps $(n+1)DT$ (U^{n+1}). Les quantités testées sont donc (en pour cent) :

$$\frac{100}{U^{n+1}}\left(E_t^{n+1/2} - E_t^{n-1/2} - \Delta W^n\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{100}{U^{n+1}}\left(E_t^{n+1/2} - E_t^{1/2} - W^n\right) \stackrel{?}{=} 0$$

où on a défini l'énergie totale $E_t^{n+1/2} = E_c^{n+1/2} + (U^{n+1} + U^n)/2$ et l'énergie d'expansion* $W^n = \sum_{i=1}^{n} \Delta W^i = \sum_{i=1}^{n} h^i DT^i U^i$. Enfin si le $n^{ième}$ pas de temps correspond à une division par 2 de DT, il faut effectuer le bilan au temps $(n - 1/8)$ DT(E_t évalué à $n + 1/4$ et $n - 1/2$) pour rester centré. La variation de l'énergie d'expansion correspondante est alors calculée par interpolation.

---

*en terme de pas de temps (et non de temps), et appelant $E_c(n)$, $U(n)$, $W(n)$ les énergies en *fin d'exécution* d'un pas de temps n on a :

$E_c(n) = E_c^{n+1/2}$, $U(n) = U^{n+1}$, $E_t(n) = E_c(n) + [U(n) + U(n-1)]/2$ et

$\Delta W(n) = h^n DT^n U^n = h^n DT^n U(n-1)$

c) Structure "annexes"

Nous avons décrit jusqu'ici l'ensemble des étapes qui permettent en principe d'effectuer un pas de temps. Cependant pour que le code soit prêt à "fonctionner", quelques structures annexes sont nécessaires. Nous allons rapidement décrire l'organisation des bilans et de la vérification du pas de temps, avant de tracer (Voir figure IX) un organigramme détaillé qui résume l'enchainement des sous-programmes et de leurs fonctions. La gestion des supports mémoires, plus technique, n'est décrite qu'à l'annexe V.

i) Bilans

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté trois diagnostics qui correspondent aux trois premiers moments de vitesse de l'équation simulée : la conservation du nombre de particules, de l'impulsion totale et de l'énergie. Le nombre de mailles "vides", le temps dynamique de collapse minimum et la longueur de Jeans sont trois autres indicateurs intéressants.

La conservation du *nombre de particules* est testée (dans RHOCAL) en sommant sur toute la grille les fluctuations de densité ($\hat{\rho}_i = N_i - \bar{N}$) calculées en chaque point, le résultat devant évidemment valoir 0, aux accumulations d'erreurs près. Le sous-programme RHOCAL calcule aussi le *nombre de sites "vides"*, c'est-à-dire de densité inférieure à une valeur donnée (en pratique 0.02 de la densité moyenne) ainsi que la densité maximale. A cette fluctuation extrême ($\delta_{Max} = \frac{\rho_{Max} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$) est associée à l'instant θ un *temps caractéristique de collapse minimal* $\Delta\theta_c$:

$$\Delta\theta_c = \left[4\pi G a(\rho_{Max} - \bar{\rho})\right]^{-1/2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} = -\nabla_x \Phi \quad , \quad \Delta_x \Phi = 4\pi G a(\rho - \bar{\rho})\right)$$

et on a vu précédemment que : $4\pi G a\bar{\rho} = 2D/\theta^2 = 4/\theta^2$

On a donc :

$$\Delta\theta_c = \frac{|\theta|}{2\sqrt{\delta_{Max}}} = \frac{|\theta|}{2\sqrt{\frac{N_i^{max} - \bar{N}}{\bar{N}}}}$$

On peut alors définir une "*longueur de Jeans" minimale** $\lambda_J = \langle u^2 \rangle^{1/2} \Delta\theta_c$
Pour tester la conservation de *l'impulsion totale*, on forme une quantité adimensionnelle $\mathcal{E}$ en divisant la somme (en double précision) des vitesses de toutes les particules par la racine carrée de la somme des carrés de ces vitesses, ce qui revient à comparer l'impulsion du centre de masse à la vitesse thermique moyenne. Le calcul des sommes ainsi que celui de la *vitesse machine maximale* d'une particule est effectué dans MOVE2V. Celui de $\mathcal{E}, \Delta\theta_c, \lambda_J$, et des bilans d'énergie est effectué par le sous-programme DIAGNO.

ii) Vérification du pas de temps

Le sous-programme DTVRIF proocède à une triple vérification.
- De nombreuses étude de ce type de code par les numériciens des plasmas ont montré que pour décrire précisément la trajectoire des particules, il faut que les particules les plus rapides ne parcourent pas plus de la moitié environ de la longueur d'onde minimale considérée. Celle-ci ayant la taille de la maille, on procède donc au test de la vitesse machine maximale $\hat{V}_{max}$:

$$\hat{V}_{max} < \alpha_1$$

ce qui revient à imposer que la particule la plus rapide ne puisse traverser plus de α_1 mailles en un pas de temps ($\hat{V} = V \frac{DT}{\Delta}$). Dans toutes nos simulations $\alpha_1 \leq 0.25$
- On s'assure ensuite que le pas de temps choisi ne représente qu'une fraction α_2 (choisie en début d'exécution) du temps de collapse minimum

$$DT \leq \alpha_2 \Delta\theta_c$$

Dans toutes nos simulations $\alpha_2 \leq 0.25$
- Enfin on impose une violation maximum α_3 de la relation de conservation

---

*En variables comobiles, la définition du II s'écrit :

$\frac{Ga}{\lambda_J} \frac{4\pi}{3} (\rho - \bar{\rho}) \lambda_J^3 \sim \sigma_\ell^2 \Leftrightarrow \lambda_J \sim \frac{\sigma_\ell \theta}{2\sqrt{\delta}}$ où σ_ℓ devrait être la dispersion *locale* de vitesse qui est très coûteuse à calculer. On se contente alors de la définition ci-dessus où σ est la dispersion globale ce qui n'est qu'approximatif.

de l'énergie (inférieure à 0.25 % en général)

$$100\left[E_t(n)-E_t(n-1)-W(n)\right] \leqslant \alpha_3 U(n)$$

Si l'une des conditions précédentes n'est pas remplie, le pas de temps suivant est divisé par deux. Le sous-programme TCSTES recalcule alors les constantes de normalisations qui permettent d'exprimer les variables en unités physiques.

Il existe encore un certain nombre de sous-programmes que nous nous contenterons de citer. RCSTES calcule une fois pour toutes les constantes du programme. IMP imprime en clair les caractéristiques de l'exécution. D'autres tracent sur listing les valeurs du champ (ETRACE) où la densité d'espace de phase (DENFAZ-PRTFAZ). Les sous-programmes ZERO et DELFAZ remettent les tableaux à zéro.

Enfin pour que le programme puisse "fonctionner" il doit disposer d'un certain nombre de mémoires "externes" à la mémoire centrale. La gestion de ces supports-mémoire fait l'objet de l'Annexe V.

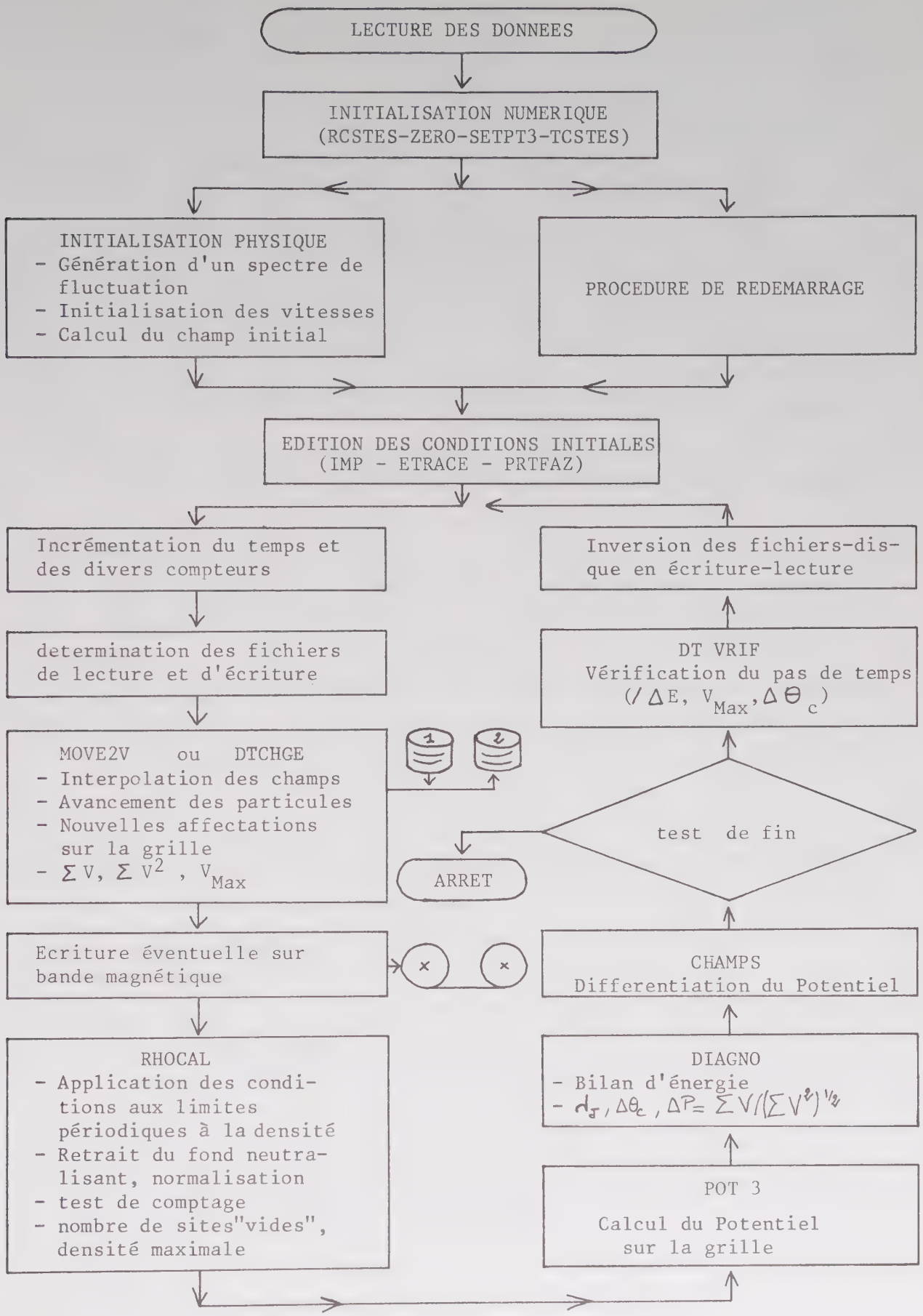

LECTURE DES DONNEES
INITIALISATION NUMERIQUE
(RCSTES-ZERO-SETPT3-TCSTES)
INITIALISATION PHYSIQUE
- Génération d'un spectre de fluctuation
- Initialisation des vitesses
- Calcul du champ initial
PROCEDURE DE REDEMARRAGE
EDITION DES CONDITIONS INITIALES
(IMP - ETRACE - PRTFAZ)
Incrémentation du temps et des divers compteurs
determination des fichiers de lecture et d'écriture
MOVE2V ou DTCHGE
- Interpolation des champs
- Avancement des particules
- Nouvelles affectations sur la grille
- Σ V, Σ V², V Max
1
2
ARRET
Ecriture éventuelle sur bande magnétique
RHOCAL
- Application des conditions aux limites périodiques à la densité
- Retrait du fond neutralisant, normalisation
- test de comptage
- nombre de sites"vides", densité maximale
Inversion des fichiers-disque en écriture-lecture
DT VRIF
Vérification du pas de temps
(/ ΔE, V Max, Δθ c)
test de fin
CHAMPS
Differentiation du Potentiel
DIAGNO
- Bilan d'énergie
- σ, Δθc, ΔP= ΣV/(ΣV²)^1/2
POT 3
Calcul du Potentiel sur la grille

Figure IX

3) Programme d'analyse des résultats

a) Introduction

A l'issue du programme principal on dispose des positions et des vitesses des particules enregistrées sur une bande magnétique. On peut alors procéder pour analyser les corrélations comme dans un catalogue réel. Par exemple, pour calculer ξ , on tire au hasard un certain nombre de centres et on compte pour chacun le nombre de voisins à l'intérieur de couronnes concentriques. Il suffit alors de normer le résultat obtenu en divisant par le résultat de comptages identiques sur une distribution aléatoire générée en début de programme.

Ce procédé, qui a l'avantage d'un parallèlisme parfait avec l'analyse des catalogues réels, a cependant l'inconvénient d'être très coûteux en temps de calcul. On peut cependant diminuer énormément le nombre d'opérations en calculant des densités sur une grille. Les fonctions de corrélations sont alors obtenues par des valeurs moyennes de produits de fluctuations en des points différents, en suivant exactement les définitions du chapitre II.

De plus, le calcul des valeurs moyennes revient à des produits de convolution et donc à de simples multiplications sur les composantes de Fourier, ce qui est extrêment rapide. Nous avons écrit un programme de chaque type pour vérifier la compatibilité des résultats. Ceux-ci étant identiques, mais obtenus environ vingt fois plus rapidement, dans les cas testés , grâce aux transformées de Fourier, nous ne décrivons pas le programme de calcul par comptage. Tous les programmes ultérieurs ont été écrits en utilisant l'analyse de Fourier.

Après avoir rappelé (b) le principe de l'analyse et les problèmes numériques que cela pose, nous indiquons (c) la structure générale du programme dont la description détaillée figure à l'Annexe VI .

b) Principe et problèmes de l'analyse de Fourier des corrélations

Nous avons vu en II que ϱ_{12} pouvait être définie par :

$$\varrho_{12} = \langle f(1) f(2) \rangle \quad , \quad f(1) \equiv f(x_1, u_1, \Theta)$$

commençons par calculer la densité réduite ξ_{12}. On a :

$$n_{12} = \bar{n}^2 a^6 (1+\xi_{12}) = \int \varrho_{12} d^3u_1 d^3u_2 = \langle \rho(1) \rho(2) \rangle$$

où ρ_1 comme dans tout le IV est la densité de masse *locale* :

$$\rho_1 \equiv \rho(x_1, \Theta) = \int f(x_1, u_1, \Theta) d^3u_1 \, , \quad \langle \rho(1) \rangle = \bar{n} a^3$$

On a donc :

$$\xi_{12} = \langle \delta\rho(1) \, \delta\rho(2) \rangle \quad , \quad \delta(x) = \frac{\rho(x) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}$$

et ξ_{12}, dans le cas d'un espace homogène, ne dépend que de la distance 1-2 :

$$\xi(x) = \langle \delta\rho(x_0) \, \delta\rho(x_0 + x) \rangle$$

Notant δ_k, les composantes de Fourier du contraste de densité $\delta(x)$, on a :

$$\delta(x) = \int \delta_k e^{ikx} d^3k$$

$$\xi(x) = \left\langle \int \delta_k \delta_{k'} e^{i(k+k')x_0} e^{ikx} d^3k \, d^3k' \right\rangle$$

et donc

$$\xi(x) = \int \langle \delta_k \delta_{-k} \rangle e^{ikx} d^3k$$

$|\delta_k|^2$ est appelé le spectre de Puissance. Au cours de l'analyse des résultats, les intégrales de Fourier sont remplacées par des séries de Fourier (conditions aux limites périodiques) et la taille de la boîte correspondant au moins à une dizaine de longueurs de corrélation, le spectre de Puissance calculé sur toute la boîte sera considéré comme la valeur moyenne sur plusieurs réalisations indépendantes (comme au cours de l'analyse des catalogues réels, des régions éloignées du ciel sont considérées comme différentes réalisation d'un même processus aléatoire). Dans ces conditions, ayant discrétisé la densité, on calcule la transformée de Fourier δ_k du contraste de densité, dont le carré du module donne le spectre de Puissance. On obtient alors ξ par simple transformation de Fourier inverse de ce spectre.

On peut effectuer une analyse similaire pour obtenir ϱ_{12} (ce qui permet ensuite, en en prenant les moments de vitesse de calculer $T_{//}$, $T_{\perp}$, $Q_{//}$, $Q_{\perp}$...). En effet, il suffit en principe de calculer les composantes de Fourier $\delta_{k,d}$ de la distribution à un point $f(x,u,\theta)$ et d'écrire :

$$\varrho_{12}(x_{12},u_1,u_2,\theta) = \left\langle \int \delta_{k,d}\,\delta_{k',d'}\, e^{i(k+k')x_0+ikx}\, e^{i(du_1+d'u_2)}\, d^3k\,d^3k'\,d^3d\,d^3d' \right\rangle$$

$$\varrho_{12} = \int \langle \delta_{k,d}\,\delta_{-k,-d} \rangle\, e^{ikx}\, e^{i(du_1+d'u_2)}\, d^3k\,d^3d\,d^3d'$$

Comme toutes les quantités qui nous intéressent théoriquement ne concernent que les vitesses relatives, on peut effectuer l'integration sur $U=(u_1+u_2)/2$ ce qui donne :

$$\int \varrho_{12}\,d^3U = \varrho'_{12}(x,u,\theta) = \int \langle |\delta_{k,d}|^2 \rangle\, e^{i(kx+du)}\, d^3k\,d^3u \quad (u=u_1-u_2)$$

Le calcul analytique de ϱ'_{12} est donc trivial. Il est malheureusement impossible à réaliser tel quel numériquement. En effet, même à D = 2, il faut calculer les valeurs discrètes de la distribution sur un hypercube (2 dimensions pour les positions et deux pour les vitesses). Si bien

que même avec un réseau à mailles très larges de 32^4 points de discrétisation (la fonction n'est alors connue que sur 16 points par axe), il faut déjà plus d'un million de mots mémoire, ce qui n'est pas disponible en mémoire centrale, et montre bien au passage la difficulté d'éventuelles analyses de corrélation distance-vitesse à 3D. On pourrait cependant imaginer de "découper" l'analyse par dimension en stockant les résultats intermédiaires sur disques magnétiques. Ceci n'a cependant pas d'intérêt. En effet, nous avons vu que la densité typique par cellule était de 10 particules. Si de plus ces particules sont réparties sur un réseau en vitesse on a alors un nombre dérisoire de particules par cellules* d'où des fluctuations statistiques énormes et des résultats qu'on sait a priori inutilisables.

Nous n'avons cependant pas utilisé jusque là l'isotropie de l'espace. Nos résultats (Voir 4)) montrent que le spectre de puissance $|\delta_k|^2$, et $\xi(x)$ obtenus numériquement sont tout à fait isotropes (k et x sont des vecteurs). Il y a donc suffisamment de particules pour que les écarts à l'isotropie de la distribution générée soit faible. On peut alors choisir une particule quelconque, et repérer toutes les autres par leur distance radiale. Ceci permet de calculer une densité spatiale unidimensionnelle et donc de ramener le réseau de discrétisation à un cube. Cependant, cela est en général encore insuffisant.

Nous avons alors scindé l'analyse en deux parties : dans un cas on calcule la densité distance radiale-vitesse parallèle (à cette distance) et dans l'autre la densité distance radiale-vitesse orthogonale, ce qui permet de discrétiser sur des réseaux carrés où l'on peut espérer obtenir des résultats pas trop bruyants. On obtient alors $\widetilde{\varrho}_1(|x|, u_{12//}, \theta)$ et $\widetilde{\varrho}_2(|x|, u_{12\perp}, \theta)$ Evidemment on doit alors renoncer à mesurer $Q_T = \int (u_\perp^2 (u_{//} - \bar{u}_{//})^2 du_\perp du_{//} \varrho_2$ qui nécessite la connaissance de la distribution complète** .

---

*même si l'exécution du programme principal était effectué sur un réseau 128^2 et qu'on se contente d'un réseau d'analyse de 32^4, on n'a encore que 0,1 particule par cellule.

**Ceci met en évidence une difficulté supplémentaire de l'analyse tridimensionnelle éventuelle des corrélations. L'élément d'intégration est alors $u_\perp du_\perp\, du_{//}$ et une telle séparation de l'analyse n'est plus possible.

Une fois obtenus $\widetilde{\rho_1}$ et $\widetilde{\rho_2}$, on peut les utiliser pour calculer $\bar{u}$, $T_{//}$, $T_{\perp}$ et $Q_{//}$ (et aussi $\bar{u}_{\perp}$ et $\int u_{\perp}^3 du_{\perp} \widetilde{\rho_2}$ qui doivent être nuls aux fluctuations statistiques près, ce qu'on peut alors tester). En plus des analyses précédentes, nous avons développé un certain nombre de diagnostics dont la réalisation ne pose pas de problème de principe (distribution de vitesse des particules par exemple) et qui ne seront donc décrits qu'à l'annexe VI.

c) Structure du programme

La structure du programme est calquée sur celle des calculs analytiques cités précédemment.
Dans un premier temps, on calcule les matrices densité (spatiale-distance radiale-vitesse parallèle, distance radiale-vitesse orthogonale) à partir des coordonnées des particules à l'aide d'une affectation NGP*. La même analyse est ensuite répétée 3 fois à quelques variantes près :

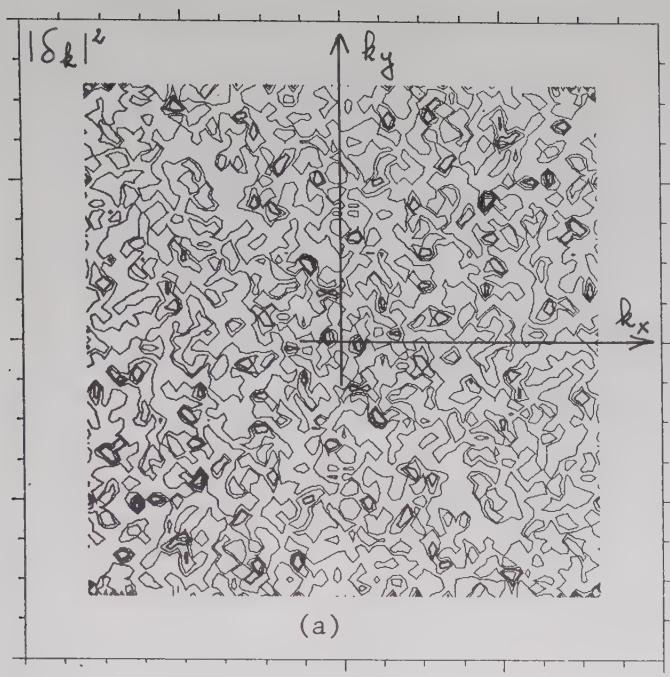
- Analyse de Fourier et calcul du carré du module des coefficients (et tracé du spectre dans le cas des corrélations spatiales seules)
- Synthèse de Fourier et tracé de la fonction de distribution.

Qui plus est, dans le cas des corrélations de vitesse on calcul aussi les 3 premiers moment de la fonction de distribution obtenue.
L'analyse complète d'un pas de temps conduit au tracé de 25 graphiques dont l'énumération serait fastidieuse. L'obtention et la signification de chacun d'entre eux est cependant indiquée à l'Annexe VI.

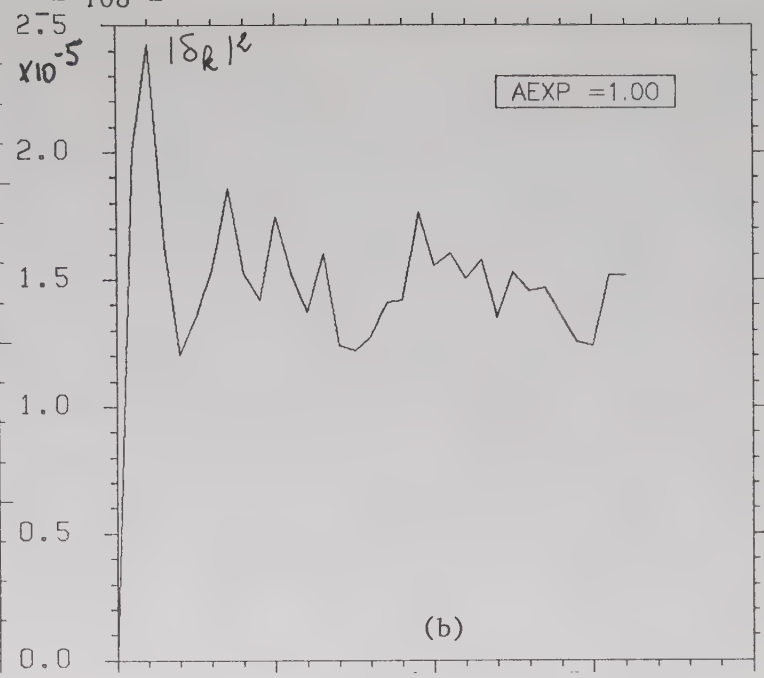
4) Conditions initiales et résultats

a) Génération des conditions initiales

Les codes PIC permettant de manipuler un grand nombre de particules, la génération de conditions initiales correspondant à une réalisation d'un processus aléatoire isotrope est relativement aisée. Par exemple, pour générer des fluctuations de densité de spectre de Fourier donné, on dispose d'abord les particules sur un réseau régulier. Les positions des particules sont alors perturbées en y ajoutant un déplacement calculé par la superposition d'ondes de direction et de phase aléatoire. Nous n'entrerons cependant pas dans le détail de la génération de n'importe quel type



(a)



(b)

FIGURE X

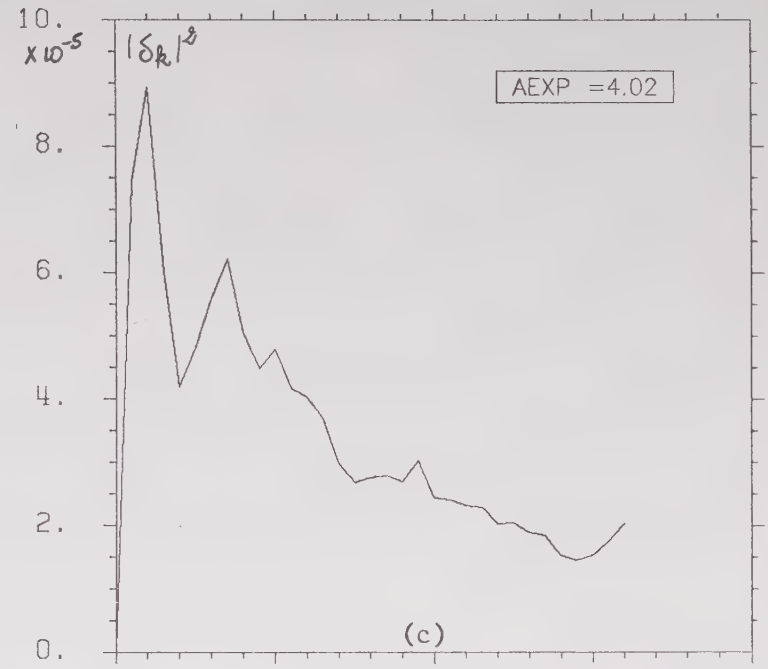
a) courbe de niveau du spectre de puissance initial (a = 1)

b) spectre de puissance initial, obtenu par moyenne sur les angles de (a).

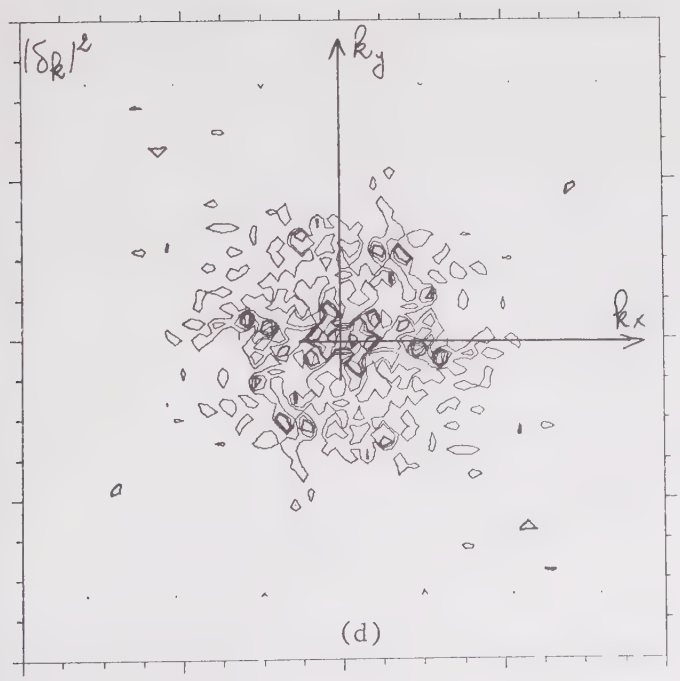
c) idem b) mais pour a = 4,02

d) idem a) mais pour a = 196

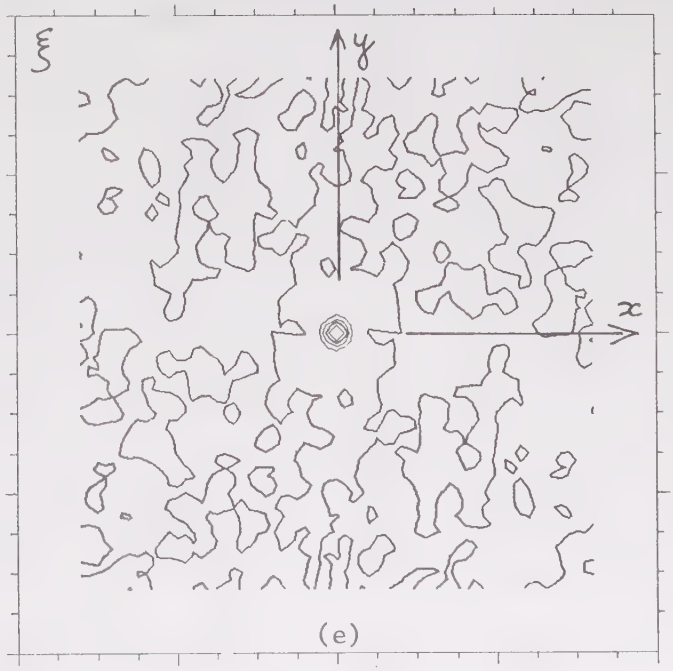
e) fonction de corrélation à deux point tirée de d) pour a = 196.



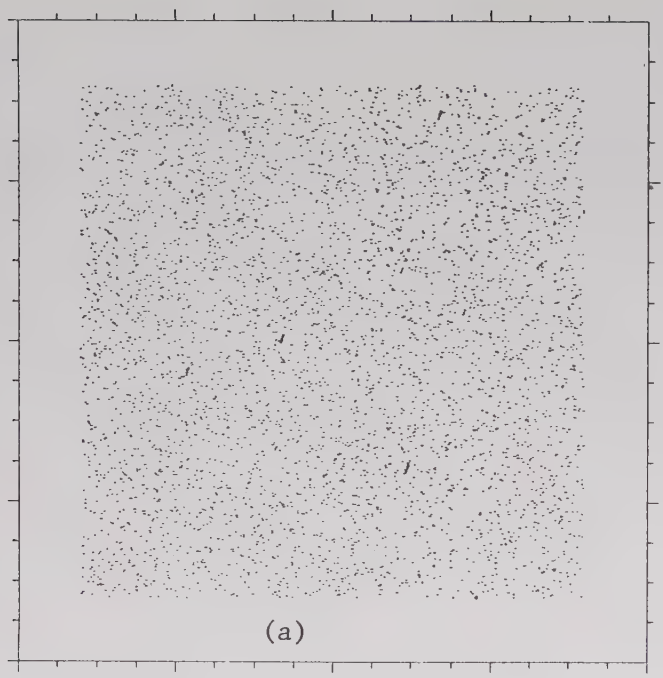
(c)



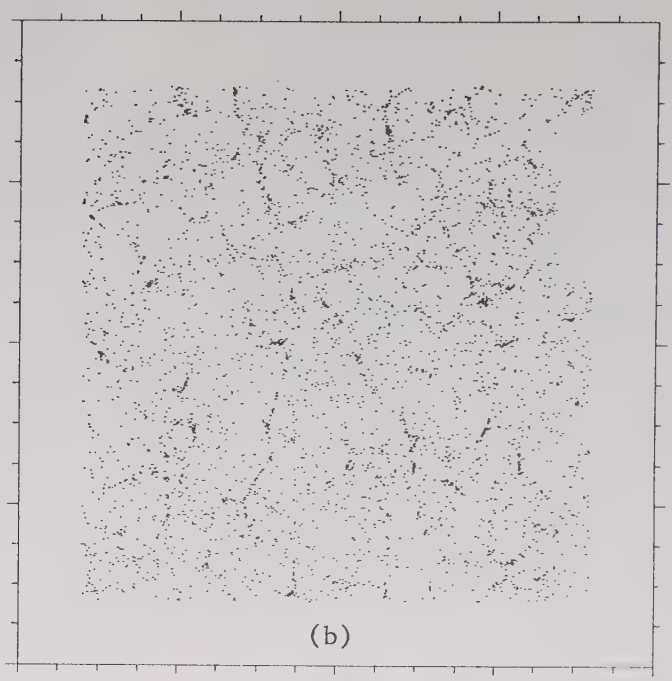
(d)



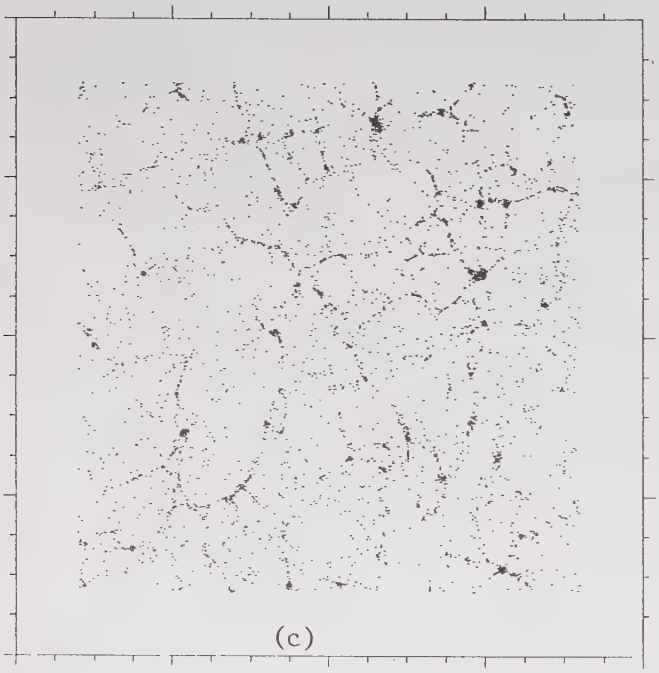
(e)



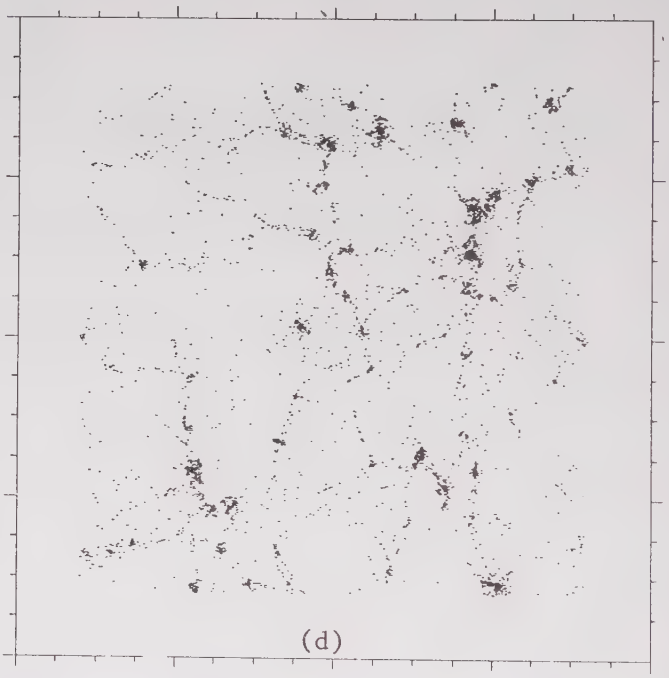
(a)



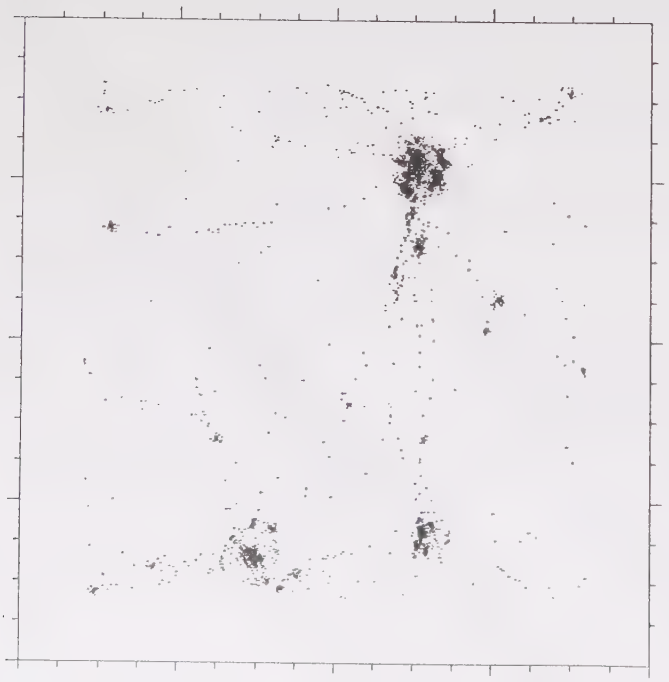
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURE XI

Evolution temporelle de la distribution de 4096 particules tirées au hasard.

a) a = 1 (distribution initiale)

b) a = 28

c) a = 68

d) a = 196

e) a = 1265

de fluctuations. En effet, nous n'avons étudié pour le moment que des fluctuations isothermes (sans coupure du spectre à courte longueur d'onde) correspondant à un bruit blanc (n=0).

Dans ce cas, il suffit de disposer au hasard les particules dans la "boîte" à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires (sous-programme INIT). On peut cependant vouloir affecter à ces particules une "température" et choisir la valeur initiale du rapport énergie thermique/énergie potentielle. Pour cela on commence par calculer le potentiel associé à la distribution générée (sous-programme POT3) ce qui permet de calculer l'énergie potentielle. On affecte alors à chaque particule une vitesse aléatoire de loi gaussienne* isotrope et d'écart-type calculé en conséquence (sous-programme SETV).

b) Premiers résultats et conclusion

Les figures présentées ci-dessous sont toutes issues d'une même éxécution comportant 64 000 particules, sans température initale, et correspondant à un bruit blanc. Cependant l'étude des résultats d'une éxécution similaire, mais avec une énergie thermique initiale (pour a=1), des particules égale à l'énergie potentielle de leur distribution, montre que les résultats obtenus sont identiques après un certain temps ($a \gtrsim 10$) bien que l'évolution initiale soit plus lente.

On remarque tout d'abord que le spectre de puissance initial est effectivement isotrope (figure X-a)) et que les différents modes de Fourier ont tous, aux fluctuations près, la même amplitude (X-b)). De plus, cette amplitude est relativement faible ($|\delta_k|^2 \sim 10^{-5}$). Les conditions initiales sont donc conformes à ce qu'on veut simuler. Par ailleurs, l'évolution des fluctuations conserve l'isotropie du spectre de Fourier (X-d)) et donc de la fonction de corrélation qu'on en déduit (X-e)). Ceci justifie a posteriori l'utilisation de l'hypothèse d'isotropie dans l'analyse des corrélations distance-vitesse.

---

*On tire n nombres aléatoires dont on fait la somme. Dans la limite $n \to \infty$, la distribution des nombres sommes tend vers une gaussienne (théorème central limite). En pratique, n=12 s'avère tout à fait suffisant (sous-programme GAUSS).

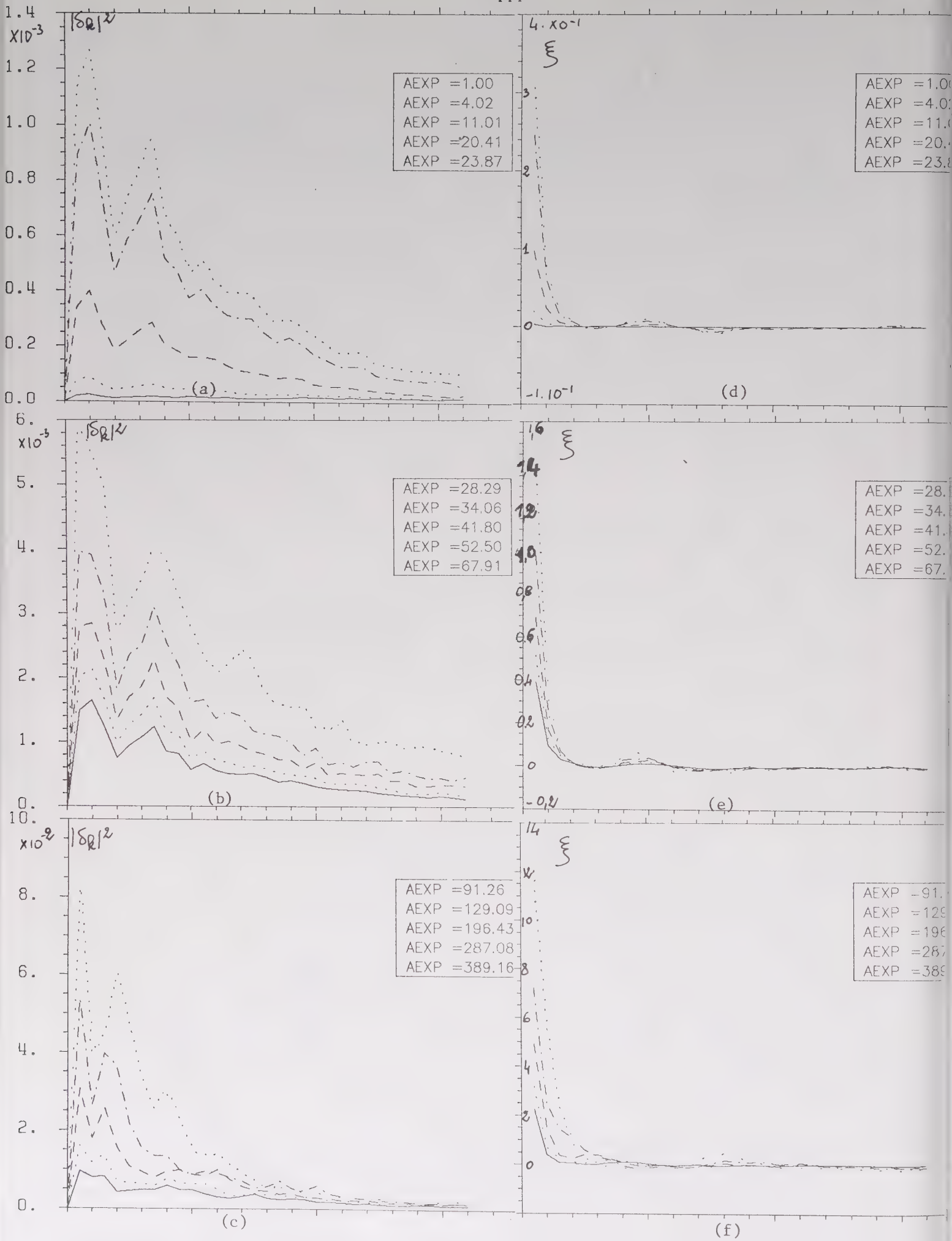


FIGURE XII : a), b), c) Evolution temporelle du spectre de puissance (obtenu par moyenne angulaire de figures comme XI a) où d).

d), e), f) évolution temporelle de la fonction de corrélation à deux points.

Au cours de l'évolution de la distribution on voit apparaître une structure en "nid d'abeille" (Voir figure XI a,b,c,d) qui peut éventuellement disparaitre aux temps très longs (XI-e)). Cette structure ne semble donc pas être le résultat spécifique de conditions initiales adiabatiques et devrait donc être considérée comme une étape naturelle de tout processus d'instabilité gravitationnelle.

L'étude de l'évolution du spectre de Fourier révèle que ce sont comme il se doit les grandes longueurs d'onde qui croissent les premières car ce sont les plus instables : dès les premiers pas de temps (X b,c) le spectre initial se déforme en laissant les grands k quasiment inchangés tandis que l'amplitude des petits k croît d'un facteur 4. Par la suite (XII a,b,c) la forme du spectre est essentiellement identique à elle-même et l'évolution se résume à la multiplication du spectre par un facteur dépendant du temps (mais pas de k). L'évolution des corrélations à deux points qui en résulte (XII d,e,f) correspond donc à une variation de l'amplitude des corrélations avec le temps, la forme des corrélations étant invariante, ce qui se voit plus aisément en coordonnées log-log (XIII c,d,e).

Les moments impairs (un et trois) des corrélations distances-vitesse sont pour le mement trop bruyants pour en extraire des conclusions fermes. Par contre on constate comme prévu (XIII a,b) que les températures $T_{//}$ et $T_{\perp}$ ont une amplitude et une évolution similaire, amplitude dépendant peu de la distance (Voir chapitre III).

Un des résultats exposé ci-dessus mérite par son importance une étude ultérieure approfondie. En effet, nous avons vu que si on décrit les corrélations à deux points par $r^{-\gamma}$, on trouve que pour des conditions initiales de bruit blanc isotherme on a $\gamma = f(x)$, γ ne dépendant pas du temps (seule l'amplitude des corrélations change). Cette dépendance de en fonction de la distance tend à prouver qu'un scénario isotherme ne saurait décrire les observations. Il sera donc particulièrement important de voir si des fluctuations adiabatiques conduisent au contraire à une dépendance de $\gamma = f(\theta)$ (et non de x sur un grand domaine) comme le suggèrent différents auteurs (Frank et Al. 1982, Melott 1982). L'exposant $\gamma = 1,8$

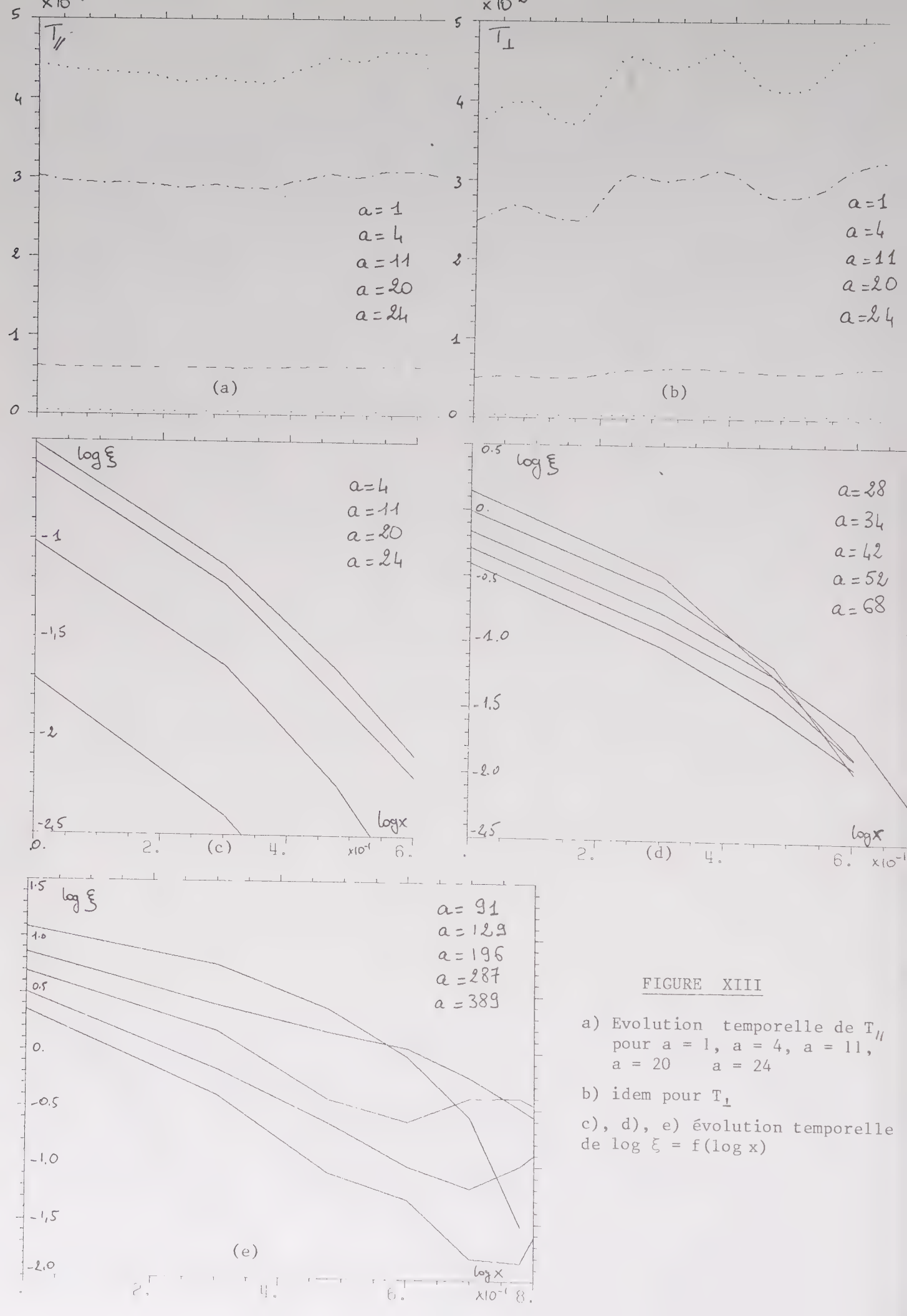


FIGURE XIII

a) Evolution temporelle de $T_{//}$ pour a = 1, a = 4, a = 11, a = 20 a = 24

b) idem pour $T_{\perp}$

c), d), e) évolution temporelle de log ξ = f(log x)

observé correspondrait alors à un moment donné de l'évolution et le scénario adiabatique serait plus adéquat pour décrire la distribution observée. Dans ce cas, une extension naturelle de ce travail sera de calculer d'une part la fonction de corrélation à 3 points ζ , et surtout d'autre part les corrélations à deux points *et deux temps*, nécessaires aux progrés de l'approche analytique.

A N N E X E I

DERIVATION DE LA HIERARCHIE BBGKY

Cette dérivation est basée sur l'intégration réitérée de la densité de probabilité à N points f, qu'on a définie par :

$$dP = f(1,2,\dots N)\, d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_N$$

où dP est la probabilité de trouver la particule 1 au "point" x_1, u_1 (à dx_1, du_1 près), la particule 2 au point 2, et ainsi de suite jusqu'à N, avec $d\mu_i = d^3x_i\, d^3u_i$. On note ρ_N la densité de probabilité de trouver une particule (quelconque) au point 1, une autre en 2, ...etc... . On a évidemment :

$$\rho_N = N!\, f \qquad \text{et donc} \qquad \int \rho_N d\mu_1 d\mu_2 \dots d\mu_N = N!$$

ρ_N obeit à l'équation de Liouville :

$$\partial_\theta \rho_N + \sum_{i=1}^{N} \left(u_i^k \partial_{x_i^k} \rho_N + \sum_{j \neq i} F_{ij}^k \partial_{u_i^k} \rho_N \right) = 0$$

où F_{ij}^k est la k-ème composante de la force exercée par la particule j sur la particule i (les particules étant discrètes la force subie par une particule est une somme de forces à deux corps).

On définit alors la fonction de distribution réduite d'ordre n, ρ_n obtenue par intégration sur les positions et les vitesses de N-n+1 particules :

$$\rho_n(1,2,\dots n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int f(1,2,\dots N)\, d\mu_{n+1} d\mu_{n+2} \dots d\mu_N$$

Cette densité réduite obéit donc à l'équation :

$$\frac{(N-n)!}{N!}\left[\partial_\theta \rho_n + \sum_{i=1}^{n}\left(u_i^k \partial_{x_i^k} \rho_n + \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{n} F_{ij}^k \partial_{u_i^k} \rho_n\right)\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{N} \int F_{ij}^k \partial_{u_i^k} f \, d\mu_{n+1} \ldots d\mu_N$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{N} \int \left(u_i^k \partial_{x_i^k} + \sum_{j=1\neq i}^{N} F_{ij}^k \partial_{u_i^k}\right) f \, d\mu_{n+1} \ldots d\mu_N = 0$$

On suppose ensuite qu'on a des conditions aux limites *périodiques*, ce qui n'a aucun effet quend le volume V d'intégration est suffisamment grand (strictement parlant quand V tend vers l'infini). Dans ce cas, on voit immédiatement par une intégration par partie que le dernier terme est nul. De plus :

$$\sum_{\substack{j=n+1 \\ (i\leq n)}}^{N} \int F_{ij}^k \partial_{u_i^k} f \, d\mu_{n+1} \ldots d\mu_N = (N-n) \int_{i\leq n} F_{i,n+1}^k \partial_{u_i^k} f \, d\mu_{n+1} \ldots d\mu_N$$

$$= \frac{(N-n)(N-n-1)!}{N!} \int F_{i,n+1}^k \partial_{u_i^k} \rho_{n+1} \, d\mu_{n+1}$$

l'équation d'évolution de ρ_n s'écrit donc simplement :

$$\partial_\theta \rho_n + \sum_{i=1}^{n}\left(u_i^k \partial_{x_i^k} \rho_n + \sum_{j=1\neq i}^{n} F_{ij}^k \partial_{u_i^k} \rho_n + \int F_{i\,n+1}^k \partial_{u_i^k} \rho_{n+1} \, d\mu_{n+1}\right) = 0$$

On a donc bien une hiérarchie d'équation, chacune reliant l'ordre n à l'ordre n+1. Comme $F_{i\,j}^k = \mathrm{Gam} \dfrac{x_{ji}^k}{x_{ji}^3}$, les deux premières équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_\theta \rho_1(1) + \mathrm{Gam} \int d\mu_2 \dfrac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \rho_2(1,2) = 0 \\ \partial_\theta \rho_2(1,2) + \left[u_1^k \partial_{x_1^k} \rho_2(1,2) + \mathrm{Gam} \dfrac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \partial_{u_1^k} \rho_2(1,2) + \mathrm{Gam} \partial_{u_1^k} \int d\mu_3 \dfrac{x_{31}^k}{x_{31}^3} \rho(1,2,3) + (1\leftrightarrow 2)\right] = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

où l'on a pris en compte que $\partial_{x_1^k} \rho_1(1) = 0$ pour un univers homogène. On voit donc, comme on pouvait s'y attendre, que cette hiérarchie exacte est identique à la hiérarchie non collisionnelle de Vlasov *aux termes d'interaction binaire* près $(\frac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \partial_{u_1^k} \rho(1,2))$. Prendre la limite fluide c'est négliger les interactions directes entre les particules par rapport à l'effet global de tous les voisins. On peut obtenir formellement cette limite en faisant tendre le nombre de particules par unité de volume n vers l'infini avec la masse m tendant vers zéro de façon à ce que la densité de masse nm reste constante. On a :

$$\rho_1 \propto n \,, \quad \rho_2 \propto n^2 \quad \text{donc} \quad \rho_2 m \propto n$$

la première équation reste bien inchangée dans cette limite. Mais dans la seconde, tous les termes sont homogènes à n^2, sauf le troisième qui est en $n^2 m$ et qui disparaît donc comme prévu. En résumé, on a le choix pour l'étude de problèmes collisionnels entre deux hiérarchies (BBGKY et Klimontovich) qui se réduisent toutes deux à la hiérarchie de Vlasov quand on ne tient plus compte du caractère discret des particules.

A N N E X E II

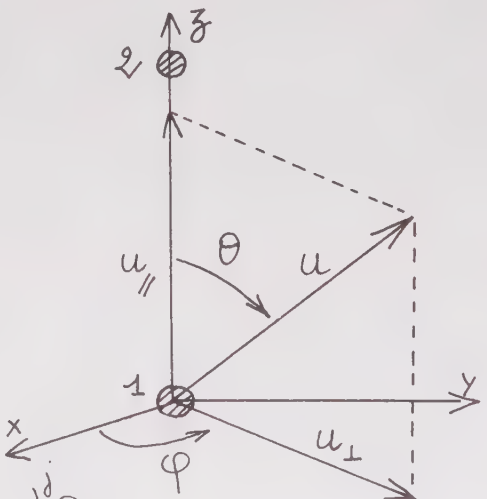
TENSEURS DE TEMPERATURE ET DE FLUX DE CHALEUR

DANS LE CAS D'UN UNIVERS HOMOGENE ET ISOTROPE

Dans le cas d'un univers homogène et isotrope, le tenseur de température et le tenseur de pression ne peuvent dépendre, par symétrie, que de deux quantités.

Plaçons-nous dans le repère de la particule 1, orienté tel que particule 2 soit sur l'axe z. On a :

$$\begin{cases} u_x = u_\perp \cos\varphi \\ u_y = u_\perp \sin\varphi \\ u_z = u_{//} \end{cases}$$



Soit $$T^{ij} = \int \frac{d^6u}{n_{12}} (u_{12}-\bar{u}_{12})^i (u_{12}-\bar{u}_{12})^j \varrho_{12}$$

ϱ_{12} ne peut pas dépendre de φ et $d^6u \equiv d^3u_{12}\, d^3U \equiv u_\perp\, du_\perp\, du_{//}\, d\varphi\, d^3U$, avec $U = \frac{u_1+u_2}{2}$ et $u_{12} = u_1-u_2$. Les termes ne contenant que $\cos\varphi$ ou $\sin\varphi$ sont nuls, et T doit donc être de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} T_\perp & & 0 \\ & T_\perp & \\ 0 & & T_{//} \end{pmatrix}$$

et sachant que $\bar{u}_\perp = 0$ et $\overline{\cos^2\varphi} = \pi$, on a

$$T_{//} = \frac{2\pi}{n_{12}} \int d^3U\, du_\perp du_{//}\, u_\perp (u_{//} - \bar{u}_{//})^2 \varrho_{12}$$

$$T_\perp = \frac{\pi}{n_{12}} \int d^3U\, du_\perp du_{//}\, u_\perp^3 \varrho_{12}$$

Le vecteur joignant les particules ayant pour coordonnées (0,0,x) dans cette base, T^{ij} peut s'exprimer comme suit :

$$T^{ij} = T_\perp \delta^{ij} + (T_{//} - T_\perp) \frac{x^i x^j}{x^2}$$

δ^{ij} et $x^i x^j / x^2$ étant des tenseurs, T^{ij} conservera cette forme dans toute base (dans une base quelconque $x'^k = a^{ki} x^i$, donc $T'^{kl} = a^{ki} a^{lj} T^{ij} = T_\perp \delta^{ij} + (T_{//} - T_\perp) \frac{x'^i x'^j}{x'^2}$)

Dans le cas d'un espace à deux dimensions, $T_\perp$ et $T_{//}$ ont alors pour expression :

$$T_{//} = \int d^2U du_\perp du_{//} (u_{//} - \bar{u}_{//})^2 \frac{\varrho_{12}}{n_{12}}, \quad T_\perp = \int d^2U du_\perp du_{//}\, u_\perp^2 \frac{\varrho_{12}}{n_{12}}, \quad n_{12} = \bar{n}^2 a^4 (1 + \xi)$$

Réutilisons maintenant le repère précédent pour évaluer le tenseur de rang 3

$$\varrho^{ijk} = \int \frac{d^6u}{n_{12}} (u_{12} - \bar{u}_{12})^i (u_{12} - \bar{u}_{12})^j (u_{12} - \bar{u}_{12})^k \varrho_{12}$$

là aussi, seule subsisteront après intégration sur φ, les termes carrés des fonctions trigonométriques de φ. Posant :

$$\begin{cases} Q_{//} = \dfrac{2\pi}{n_{12}} \displaystyle\int d^3U \, du_\perp du_{//} \, u_\perp (u_{//} - \bar{u}_{//})^3 \rho_{12} \\ Q_\perp = \dfrac{\pi}{n_{12}} \displaystyle\int d^3U \, du_\perp du_{//} \, u_\perp^3 (u_{//} - \bar{u}_{//}) \rho_{12} \end{cases}$$

On peut, comme précédemment, exprimer Q^{ijk} en fonction des composantes (0,0x) Q^{ijk} devant être symétrique en i, j, k, on a :

$$Q^{ijk} = Q_\perp \frac{\delta^{ij}x^k + \delta^{ik}x^j + \delta^{jk}x^i}{x} + (Q_{//} - Q_\perp)\frac{x^i x^j x^k}{x^3}$$

qui est bien une expression tensorielle, donc invariante dans un changement de base. Bien évidemment en deux dimensions, on aura :

$$\begin{cases} Q_{//} = \dfrac{1}{n_{12}} \displaystyle\int d^2U \, du_\perp du_{//} \, (u_{//} - u_{//})^3 \rho_{12} \\ Q_\perp = \dfrac{1}{n_{12}} \displaystyle\int d^2U \, du_\perp du_{//} \, u_\perp^2 (u_{//} - \bar{u}_{//}) \rho_{12} \end{cases}$$

A N N E X E III

DERIVEE DU MOMENT D'ORDRE 3 DE ς_{12}

Soit $$I^{ij} = \partial_{x_{12}^k} \int u_{12}^i u_{12}^j u_{12}^k \varsigma_{12} d^6u = F\delta^{ij} + (H-F)\frac{x^i x^j}{x^2}$$

$$I^{ij} = \partial_{x^k}\left[n Q^{ijk}\right] + \partial_x\left[n\bar{u} T_\perp\right]\left(\delta^{ij} + 2\frac{x^i x^j}{x^2}\right) + n\bar{u}T_\perp\left(4\frac{\delta^{ij}}{x} - 2\frac{x^i x^j}{x^3}\right)$$

$$+ 3\partial_x\left[n\bar{u}(T_{//} - T_\perp)\right]\frac{x^i x^j}{x^2} + 6n\bar{u}(T_{//} - T_\perp)\frac{x^i x^j}{x^3} + \partial_x(n\bar{u}^{-3})\frac{x^i x^j}{x^2} + 2n\bar{u}^{-3}\frac{x^i x^j}{x^3}$$

$$I^{ij} = \partial_{x^k}\left[n Q^{ijk}\right] + \frac{1}{x^4}\partial_x\left[n x^4 \bar{u} T_\perp\right]\delta^{ij}$$

$$+\left[\frac{3}{x^2}\partial_x\left[n x^2 \bar{u} T_{//}\right] - \frac{1}{x^8}\partial_x\left[n x^8 \bar{u} T_\perp\right] + \frac{1}{x^2}\partial_x(n x^2 \bar{u}^{-3})\right]\frac{x^i x^j}{x^2}$$

Or on a :

$$\partial_{x^k}\left[n Q^{ijk}\right] = n Q_\perp\left(4\frac{\delta^{ij}}{x} - 2\frac{x^i x^j}{x^3}\right) + 2n(Q_{//} - Q_\perp)\frac{x^i x^j}{x^3}$$

$$+ \partial_x(n Q_\perp)\left(\delta^{ij} + 2\frac{x^i x^j}{x^2}\right) + \partial_x\left[n(Q_{//} - Q_\perp)\right]\frac{x^i x^j}{x^2}$$

$$\partial_{x^k}\left[n Q^{ijk}\right] = \frac{1}{x^4}\partial_x(n x^4 Q_\perp)\delta^{ij} + \left[\frac{1}{x^2}\partial_x(n x^2 Q_{//}) + x^4\partial_x\left[\frac{n Q_\perp}{x^4}\right]\right]\frac{x^i x^j}{x^2}$$

On a donc :

$$F(x,\Theta) = \frac{1}{x^4}\overset{\frown}{\partial}_x\left[n x^4 (Q_\perp + \bar{u}\, T_\perp)\right]$$

et donc

$$H(x,\Theta) = \frac{1}{x^2}\overset{\frown}{\partial}_x\left[n x^2 (Q_{//} + 3\bar{u}\, T_{//})\right] + x^4 \overset{\frown}{\partial}_x\left(\frac{n Q_\perp}{x^4}\right) - \frac{1}{x^8}\overset{\frown}{\partial}_x\left(n x^8 \bar{u}\, T_\perp\right)$$

$$+ \frac{1}{x^2}\overset{\frown}{\partial}_x\left(n x^2 \bar{u}^3\right) + \bar{F}(x,\Theta)$$

$$H(x,\Theta) = \frac{1}{x^2}\partial_x\left[n x^2 (Q_{//} + 3\bar{u}\, T_{//})\right] + 2\partial_x(n Q_\perp)$$

$$- \frac{4}{x} n \bar{u}\, T_\perp + \frac{1}{x^2}\overset{\frown}{\partial}_x\left(n x^2 \bar{u}^3\right)$$

A N N E X E IV

EQUATION DE CONSERVATION DES "DOUBLES-PAIRES"

La fonction de corrélation à 3 points $\tilde{n}_{123}$ ne doit dépendre que de deux vecteurs. On choisit x_{12}^{α} et x_{13}^{α} comme variables indépendantes, et on se place dans la limite d'amas virialisés où on a $\bar{u} = k(\Theta)x^{\alpha}$.
Pour une paire, on a (Moment d'ordre 0) :

$$\partial_\theta n_{12} + k\,\partial_{x_{12}^\alpha}\left(n_{12}x_{12}^\alpha\right) = 0$$

ce qui permet d'écrire :

$$J = \frac{1}{k}\left(n_{12}n_{23} + n_{23}n_{31} + n_{31}n_{12}\right) = \frac{n_{12}}{2}\left(\partial_{x_{13}^\alpha} - \partial_{x_{12}^\alpha}\right)\left[n_{23}\left(x_{13}^\alpha - x_{12}^\alpha\right)\right] + n_{23}\,\partial_{x_{12}^\alpha}\left(n_{12}x_{12}^\alpha\right)$$
$$+ n_{23}\,\partial_{x_{13}^\alpha}\left(n_{13}x_{13}^\alpha\right) + \frac{n_{13}}{2}\left(\partial_{x_{13}^\alpha} - \partial_{x_{12}^\alpha}\right)\left[n_{23}x_{23}^\alpha\right]$$
$$+ n_{13}\,\partial_{x_{12}^\alpha}\left(n_{12}x_{12}^\alpha\right) + n_{12}\,\partial_{x_{13}^\alpha}\left(n_{13}x_{13}^\alpha\right)$$

$$J = \partial_{x_{12}^\alpha}\left[n_{12}\left(n_{13}+n_{23}\right)x_{12}^\alpha\right] - x_{12}^\alpha n_{12}\,\partial_{x_{12}^\alpha} n_{23} + \partial_{x_{12}^\alpha}\left[n_{13}n_{23}x_{12}^\alpha\right] - n_{13}\left(3n_{23} + x_{12}^\alpha\,\partial_{x_{12}^\alpha} n_{23}\right)$$
$$+ \partial_{x_{13}^\alpha}\left[n_{13}\left(n_{12}+n_{23}\right)x_{13}^\alpha\right] - x_{13}^\alpha n_{13}\,\partial_{x_{13}^\alpha} n_{23} + \partial_{x_{13}^\alpha}\left[n_{12}n_{23}x_{13}^\alpha\right] - n_{12}\left(3n_{23} + x_{13}^\alpha\,\partial_{x_{13}^\alpha} n_{23}\right)$$
$$+ \frac{n_{12}+n_{13}}{2}\left[-x_{12}^\alpha\,\partial_{x_{13}^\alpha} n_{23} + 3n_{23} + x_{13}^\alpha\,\partial_{x_{13}^\alpha} n_{23} + 3n_{23} + x_{12}^\alpha\,\partial_{x_{12}^\alpha} n_{23} - x_{13}^\alpha\,\partial_{x_{12}^\alpha} n_{23}\right]$$

ce qui se met sous la forme :

$$J = \partial_{x_{12}^\alpha}\left[(n_{12}n_{23}+\text{sym})X_{12}^\alpha\right] + \partial_{x_{13}^\alpha}\left[(n_{12}n_{23}+\text{sym})X_{13}^\alpha\right] - \frac{n_{12}+n_{13}}{2}\left(X_{12}^\alpha + X_{13}^\alpha\right)\left(\partial_{x_{12}^\alpha} + \partial_{x_{13}^\alpha}\right) n_{23}$$

le dernier terme étant nul puisque n_{23} ne dépend que de x_{23}, on a :

$$\partial_\theta\left(n_{12}n_{23}+\text{sym}\right) + \partial_{x_{12}^\alpha}\left[(n_{12}n_{23}+\text{sym})\bar{u}_{12}^\alpha\right] + \partial_{x_{13}^\alpha}\left[(n_{12}n_{23}+\text{sym})\bar{u}_{13}^\alpha\right] = 0$$

et en multipliant par la constante $\bar{n}^2\, a^6$ on trouve donc l'équation cherchée :

$$\partial_\theta \tilde{N}_{123} + \partial_{x_{12}^\alpha}\left(\tilde{N}_{123}\,\bar{u}_{12}^\alpha\right) + \partial_{x_{13}^\alpha}\left(\tilde{N}_{123}\,\bar{u}_{13}^\alpha\right) = 0$$

A N N E X E V

GESTION DES SUPPORTS - MEMOIRE

Afin de pouvoir manipuler un grand nombre de particules, celles-ci sont groupées par "Blocs" (4096 particules). A un instant donné, tous les blocs sont stockés sur un disque magnétique 1. L'avancement est effectué bloc par bloc; c'est-à-dire qu'on lit les positions et les vitesses des particules d'un bloc sur le disque 1, on les avance (MOVE2V) puis on les écrit sur un deuxième disque. Le bloc suivant de 1 est alors lu, avancé, puis écrit sur 2 et ainsi de suite. A la fin de l'opération les positions et les vitesses mises à jour ont toutes été transférées sur le disque 2 où elles prennent la place de celles correspondant à l'avant dernier pas de temps. Il suffit alors de permuter le rôle de ces deux disques (écriture ou lecture) pour effectuer le pas de temps suivant. Ces deux"fichiers" sur disque sont temporaires et disparaissent à la fin de la simulation.

Cependant le temps de résidence en machine de ce code pouvant être long, la possibilité d'une défaillance provisoire du matériel n'est pas exclue. D'autre part, on peut avoir le désir de prolonger une simulation au-delà du temps prévu. Une structure de sauvetage est donc prévue. Périodiquement, les blocs sont inscrits sur un disque de "redémarrage" au lieu du deuxième disque habituel. On stocke alors à la suite toutes les données nécessaires pour reprendre l'exécution à ce pas de temps (caractéristiques du système, champs, pas de temps...) ainsi que l'ensemble des diagnostics de contrôle examinés en i) afin d'en faire une exploitation graphique ultérieure. L'exécution se poursuit ensuite normalement, en débutant la lecture sur ce disque de redémarrage. En fait, pour prévenir tout risque d'incident au cours de l'inscription sur le disque de redémarrage (qui efface les données précédentes), on fait appel là aussi à *deux* disques de

redémarrage utilisés alternativement. Ces deux fichiers de redémarrage sont évidemment conservés à la fin de la simulation .

Enfin les résultats de la simulation (les positions et les vitesses des particules) sont périodiquement (et successivement) inscrits sur une bande magnétique, et non un disque car la quantité d'information des enregistrements cumulés est gigantesque (i.e. 25 enregistrements pour 100 000 particules correspondent à 10^8 (mots).

En résumé, on a deux fichiers disques (temporaires) qui servent à avancer les particules, 2 fichiers disques (permanents) de redémarrage et une bande magnétique de résultats bruts.

A N N E X E VI

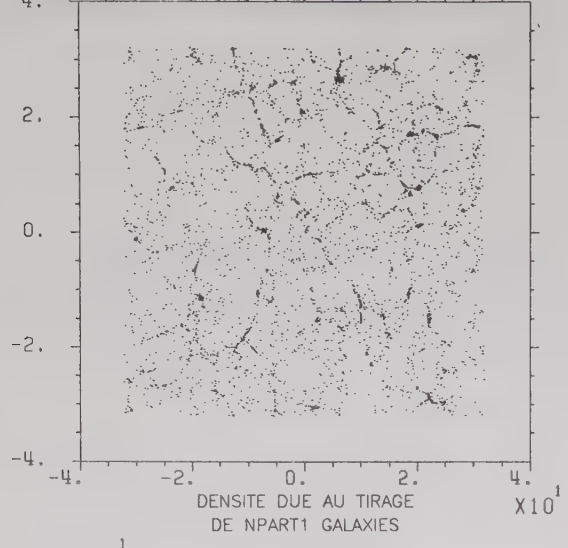
STRUCTURE DU PROGRAMME ET DESCRIPTION DES DIAGNOSTICS

Le programme est divisé en sections dont chacune correspond à à l'édition d'une "page" graphique (de 4 tracés) résumant les résultats. Avant chaque exécution, on choisit la valeur d'un certain nombre de "clés" qui déterminent le calcul et l'édition de telle ou telle page. Plutôt que de détailler la structure elle-même du programme qui n'a rien d'universelle, nous allons décrire page par page les différents graphiques, en signalant les sous-programmes permettant d'obtenir les données correspondantes, malgré le caractère quelque peu fastidieux d'une telle énumération.

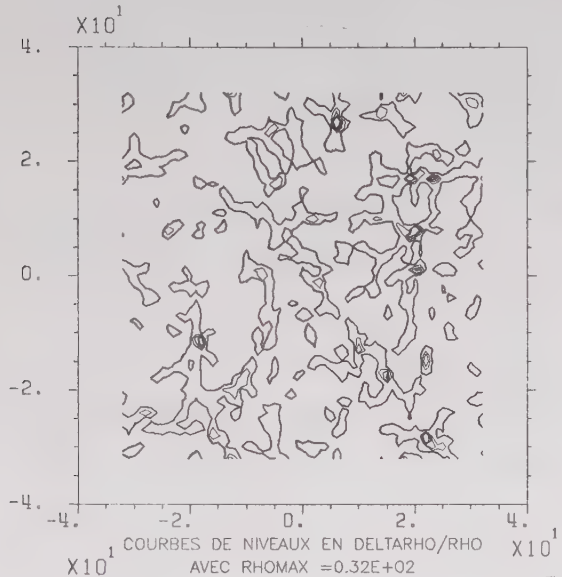
Page 1 : Cette page correspond à l'analyse "visuelle" des résultats. Le premier graphique correspond au tracé des positions de 40 96 particules tirées au hasard, chacune étant signalée par un point. Le second tracé (lecture de pages par colonne) est une carte de contour du contraste de densité. Comme dans toutes les cartes de contour suivantes, les lignes de niveaux correspondent à des niveaux régulièrement espacés entre 0 et la valeur maximale de la quantité tracée, ici $\delta(x)$. Le contraste, est calculé par affectation NGP (au point de grille le plus proche) des particules ce qui évite l'autocorrélation à l'échelle de la maille. Cette affectation est génératrice de bruit (fonction de forme discontinue), cependant le nombre de particule est suffisant pour maintenir le bruit à un faible niveau, ce qui évite le recours à une affectation CIC plus coûteuse. Le calcul de $\delta(x)$, comme toutes les opérations portant sur les particules est effectué par le sous-programme RHOCAL. Le graphique numéro

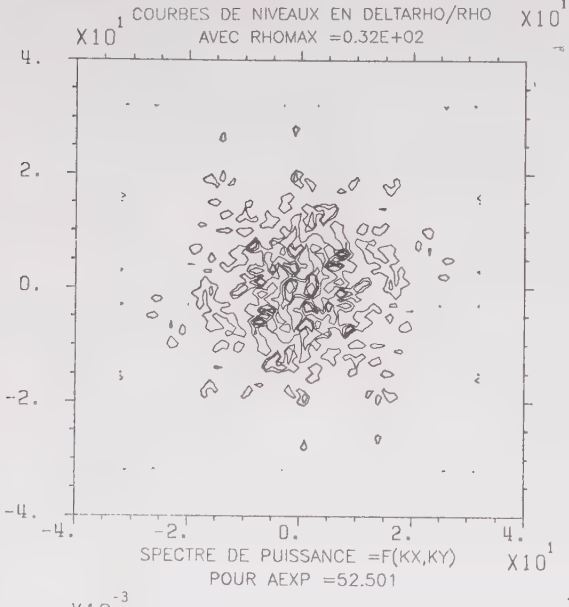
DIAGNOSTICS PUREMENT SPATIAUX
CORRESPONDANTS A

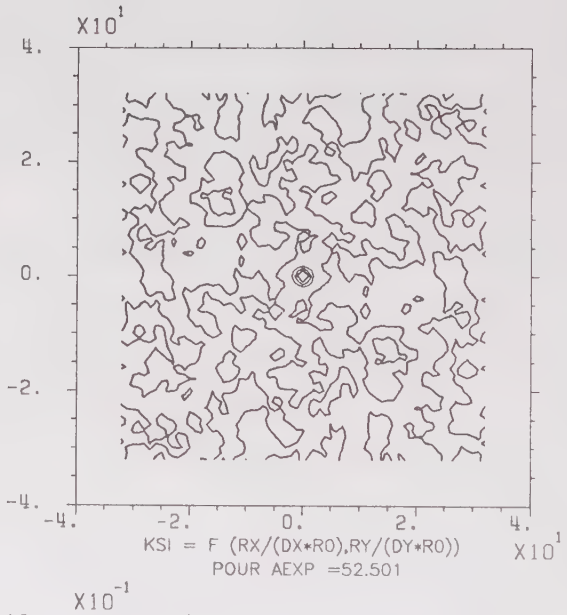
IDIAG = 9
ITIME = 200
AEXP = 52.501
DT = 0.002



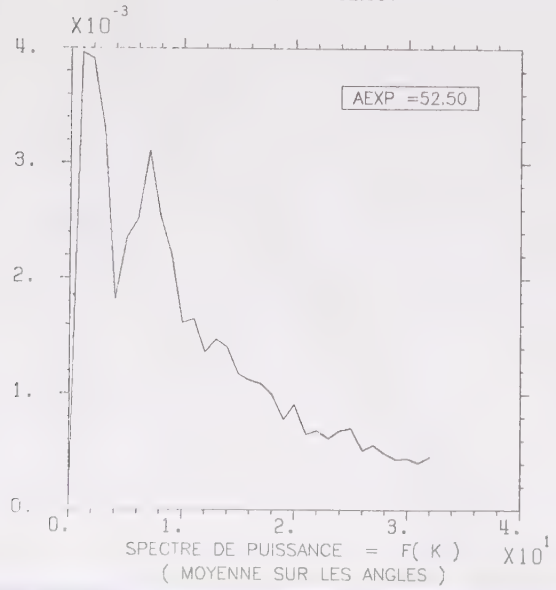
Page 1

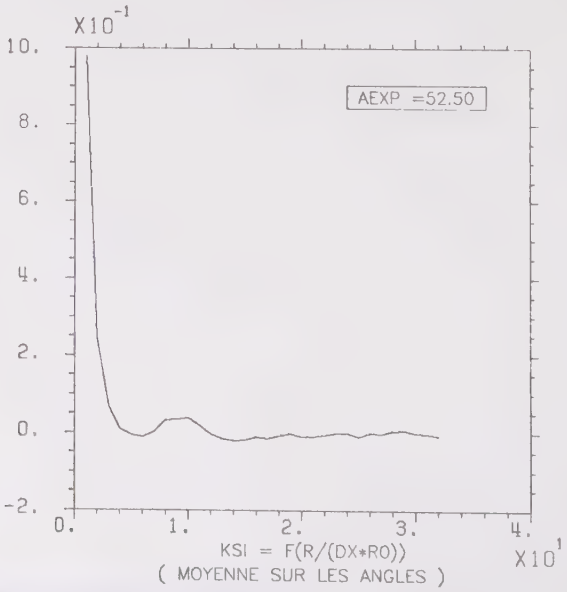






Page 2





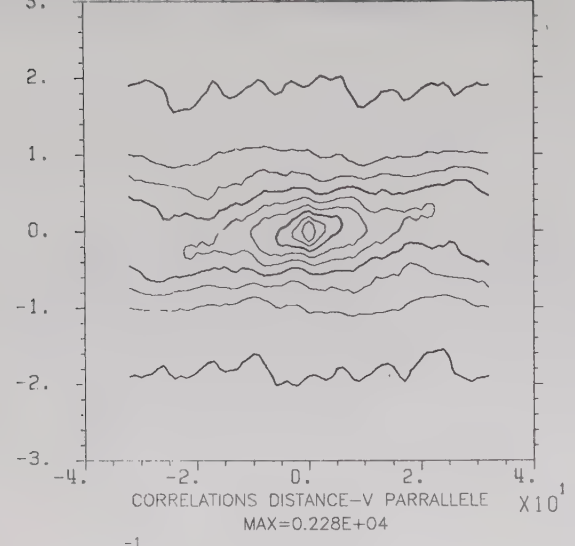
trois est un simple encart indiquant certaines caractéristiques de l'enregistrement analysé. Le graphique numéro quatre est une carte de contour de la température T. Celle-ci est simplement calculée en formant pour les n particules affectées à un point de grille donné la quantité suivante :

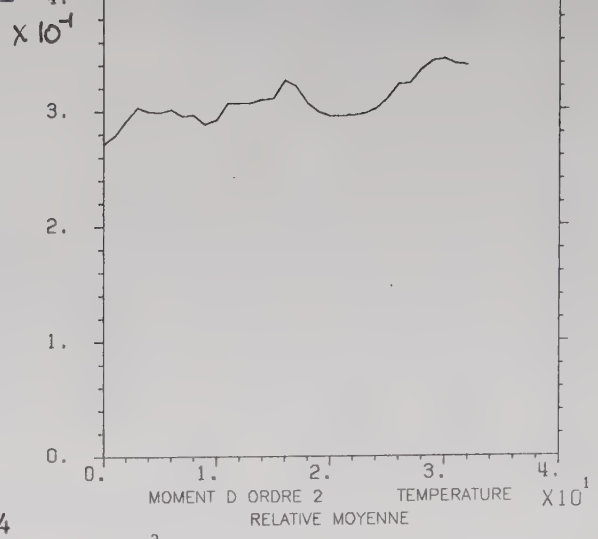
$$T = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(V_x^2+V_y^2) - \left(\sum_{i=1}^{n}V_x\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}V_y\right)^2\right]$$

Page 2 : Cette page présente les résultats de l'analyse des corrélations spatiales. Le premier graphique indique les courbes de niveau en fonction de k_x et k_y du spectre de puissance $|\delta_k|^2$ qui est calculé par le sous-programme TFMOD qui utilise des transformées de Fourier rapides. La courbe du dessous correspond simplement à la moyenne angulaire (sous-programme MOYANG) de $|\delta_k|^2$, c'est-à-dire à $|\delta_k|^2 = f(|k|)$). La transformée de Fourier inverse (sous-programme TFMODI) du spectre permet de tracer en fonction de x et y les courbes de niveau de ξ . On constate que tout comme pour le spectre de puissance, on a une symétrie circulaire bien vérifiée, qui traduit l'isotropie de l'espace, aux fluctuations dûes à un échantillon fini près. La dernière courbe indique que le résultat de la moyenne angulaire de $\xi(x,y)$.

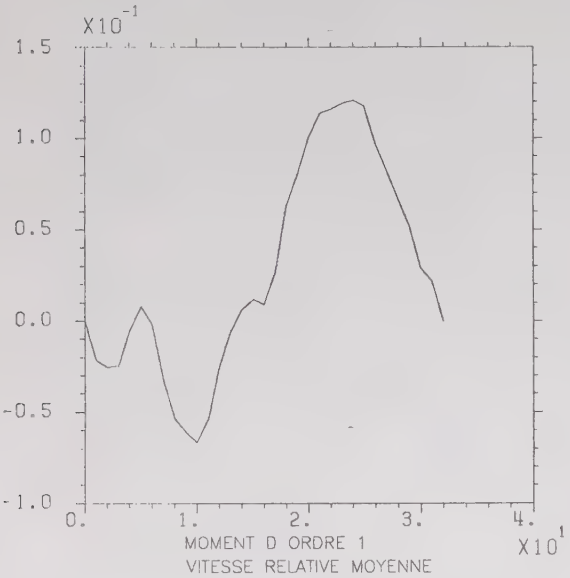
Page 3 : Pour pouvoir calculer les fonctions de corrélation $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$ on forme les matrices densité distance radiale - vitesse parallèle et distance radiale - vitesse orthogonale. La valeur moyenne sur l'espace de ces matrices (en sommant dans la direction spatiale) donne la distribution des vitesses parallèles et orthogonales. Ceci permet de vérifier aux fluctuations près la symétrie de ces distributions et la nullité de leurs valeurs moyennes. Le tracé 3 est un simple encart de rappel des données de l'analyse tandis que le graphique suivant montre la fonction de normalisation ($\int\tilde{\rho}_1 d^2u_{//} = \int\tilde{\rho}_2 d^2u_{\perp}$) des moments de $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$. Cette fonction n'est pas simplement $\xi(r)$ (mais plutôt $2\pi r\,\xi(r)$), les particules étant affectées en fonction de leur distance *radiale* pour calculer $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$.

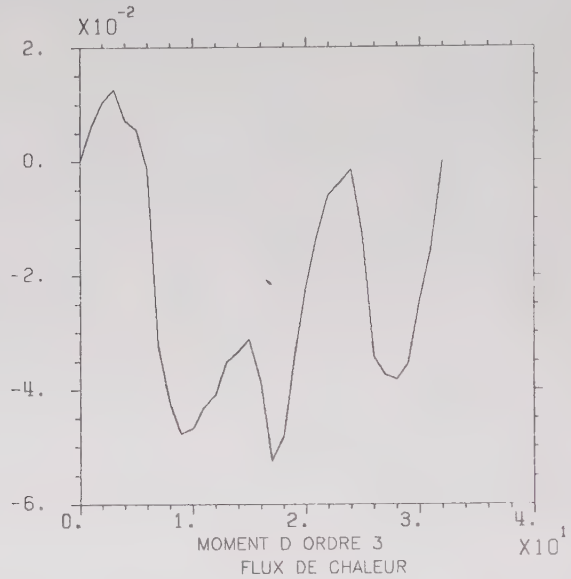
Page 4 : Cette page indique les résultats de l'analyse des corrélations distance - vitesse parallèle. L'utilisation successive des sous-programmes TFMOD et TFMODI permet de calculer $\tilde{\rho}_1(|x|, u_{//}, \theta)$ dont la carte de

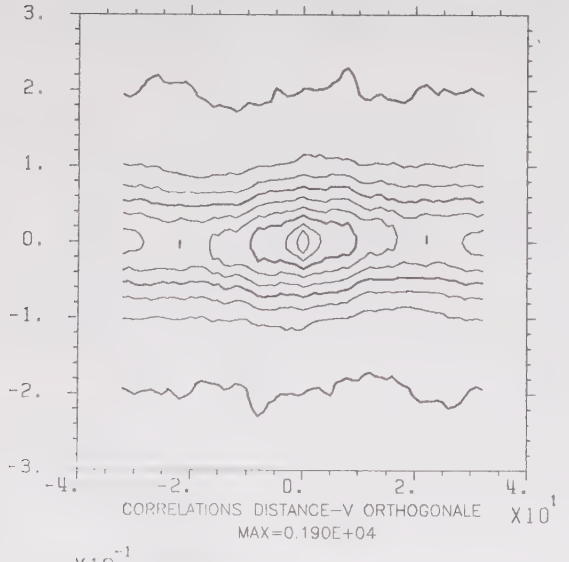

CORRELATIONS DISTANCE–V PARRALLELE
MAX=0.228E+04
X10¹

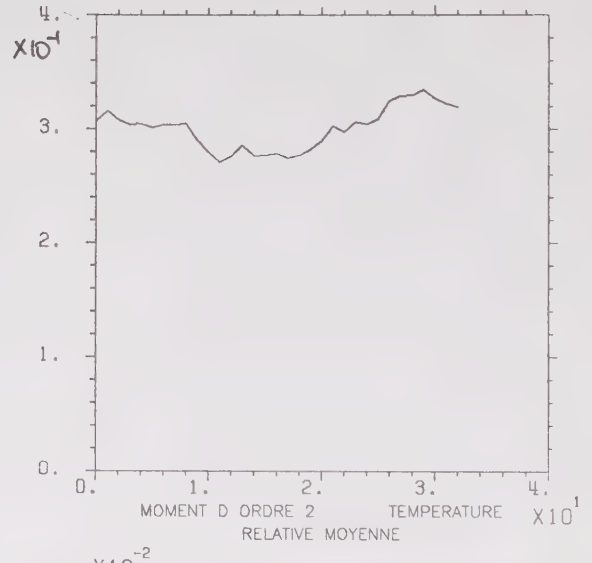

X10⁻¹
MOMENT D ORDRE 2 TEMPERATURE
RELATIVE MOYENNE
X10¹

Page 4

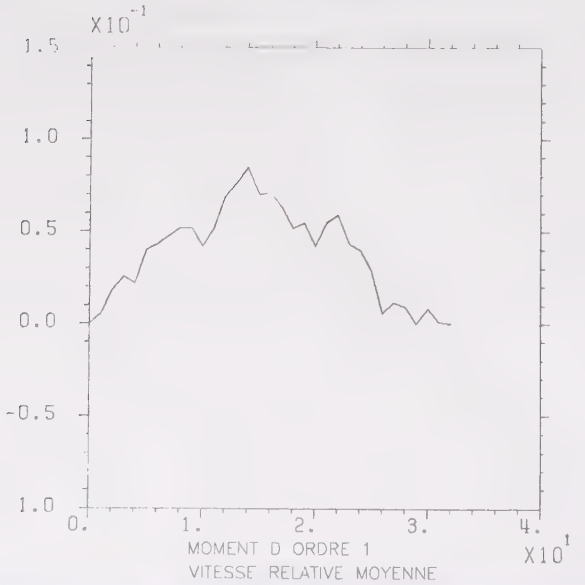

X10⁻¹
MOMENT D ORDRE 1
VITESSE RELATIVE MOYENNE
X10¹

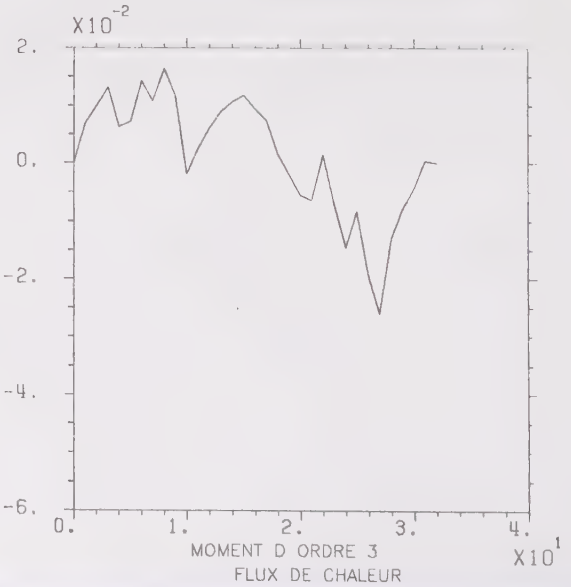

X10⁻²
MOMENT D ORDRE 3
FLUX DE CHALEUR
X10¹


CORRELATIONS DISTANCE–V ORTHOGONALE
MAX=0.190E+04
X10¹


X10⁻¹
MOMENT D ORDRE 2 TEMPERATURE
RELATIVE MOYENNE
X10¹

Page 5


X10⁻¹
MOMENT D ORDRE 1
VITESSE RELATIVE MOYENNE
X10¹


X10⁻²
MOMENT D ORDRE 3
FLUX DE CHALEUR
X10¹

contour constitue le premier tracé. On peut alors calculer (sous-programme MOM12) les trois premiers moments de vitesse de $\tilde{\rho}_1$:

$$u_{//} = \bar{u} = \frac{\int \tilde{\rho}_1 u_{//} du_{//}}{\int \tilde{\rho}_1 du_{//}}, \quad T_{//} = \frac{\int (u_{//} - \bar{u}_{//})^2 \tilde{\rho}_1 du_{//}}{\int \tilde{\rho}_1 du_{//}}, \quad Q_{//} = \frac{\int (u_{//} - \bar{u}_{//})^3 \tilde{\rho}_1 du_{//}}{\int \tilde{\rho}_1 du_{//}}$$

qui font l'objet des autres contours graphiques de la page. Les premiers essais ont montré que l'affectation NGP seule était trop bruyante pour calculer les moments. On applique alors un lissage (sous-programme LISS) sur la matrice de densité initiale en ramplaçant la valeur en chaque point par la valeur moyenne sur les 9 points les plus proches ce qui permet de "couper" les plus courtes longueurs d'onde avant d'effectuer l'analyse de Fourier.

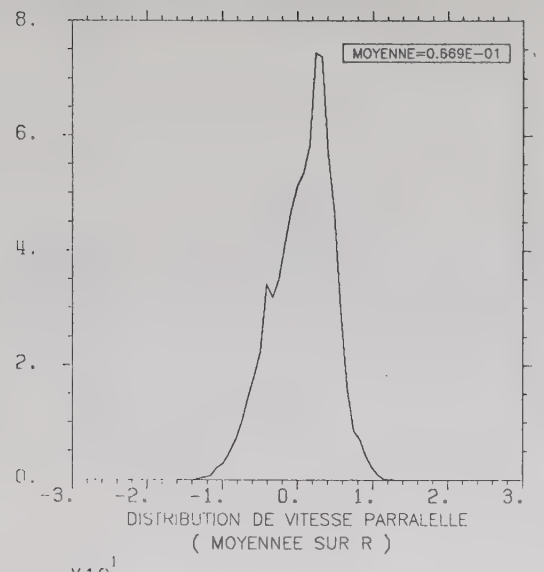
Page 5 : Y sont présentés les résultats d'une analyse identique sur la matrice densité distance radiale -vitesse orthogonale. Remarquons cependant que par isotropie, on s'attend à trouver :

$$u_{\perp} = \frac{\int \tilde{\rho}_2 u_{\perp} du_{\perp}}{\int \tilde{\rho}_2 du_{\perp}} \sim 0 \; ; \qquad \frac{\int (u_{\perp} - \bar{u}_{\perp})^3 \tilde{\rho}_2 du_{\perp}}{\int \tilde{\rho}_2 du_{\perp}} \sim 0$$

et les écarts à zéro nous renseigne sur les fluctuations et permettent d'évaluer les erreurs sur $T_{\perp}$ par exemple.

Les cinq pages décrites précédemment correspondent à l'analyse d'une distribution à un temps donné. Trois pages résument périodiquement (tous les 3 à 5 analyses en pratique) une partie des résultats précédents pour en montrer l'évolution.

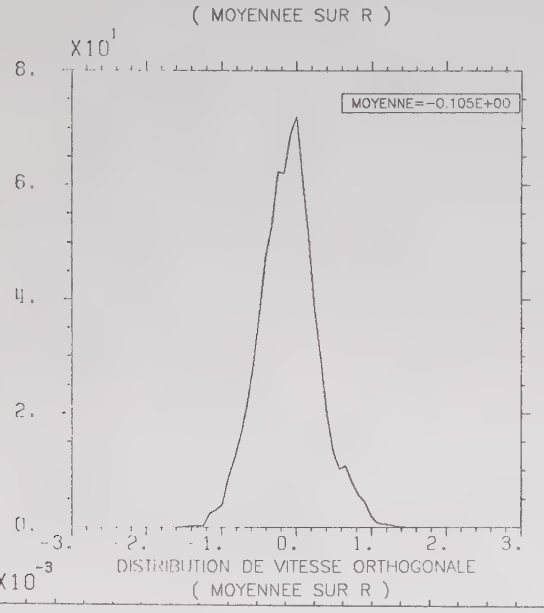
Page 6 : Cette page résume l'évolution temporelle des corrélations spatiales et est générée par le sous-programme RESUME. Le premier graphique montre l'évolution temporelle du spectre de puissance $|\delta_k|^2$ et le second montre celle de $|k|\,|\delta_k|^2$ ($D=2$), quantité qui tient compte de l'espace des phases disponible, ce qui permet de voir la puissance sur chaque mode d'amplitude donné quelle que soit la direction. Le troisième graphique rappelle l'évolution de ξ, tandis que le quatrième montre celle de $\mathrm{Log}(\xi) = f(\log x)$ jusqu'au premier zéro de ξ .

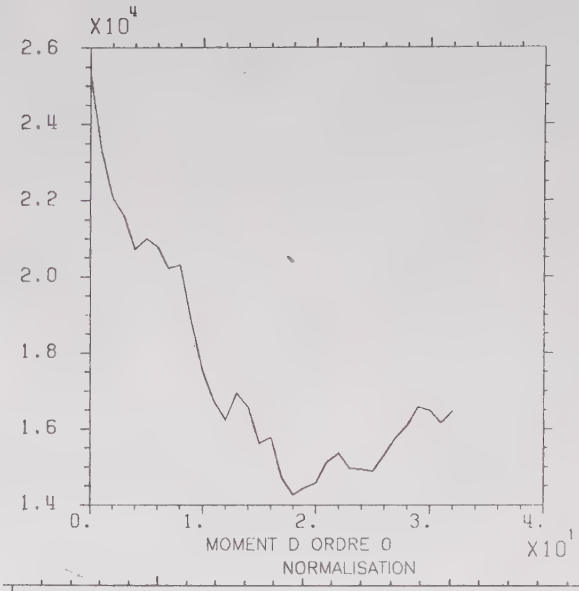


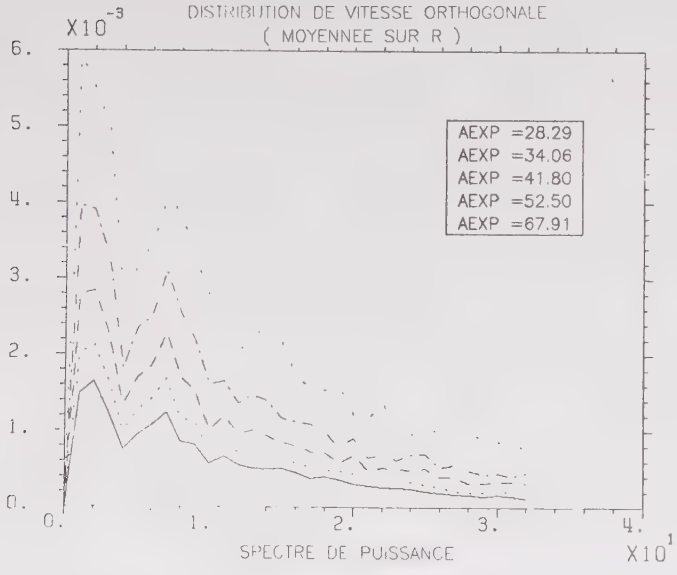
ANALYSE DES CORRELATIONS
DISTANCE – VITESSE POUR

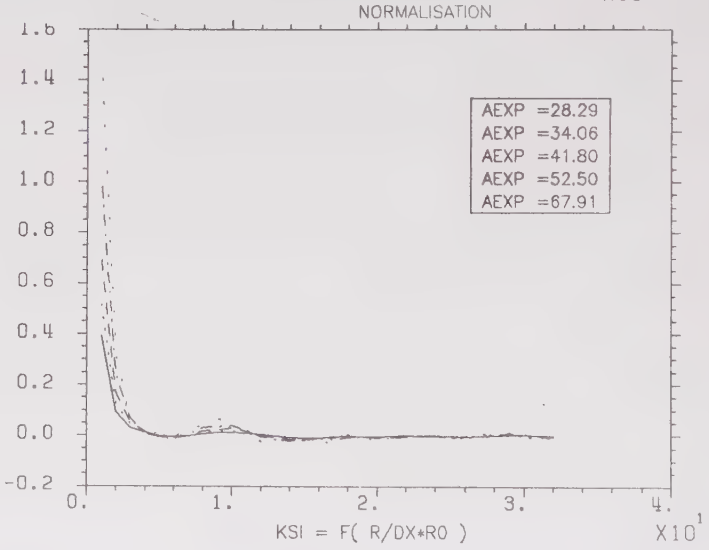
IDIAG	=	9
ITIME	=	200
AEXP	=	52.501
DT	=	0.002

Page 3

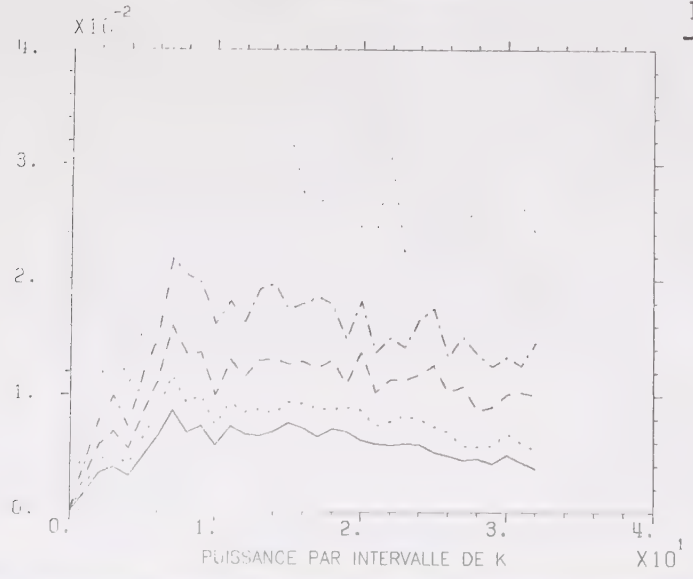


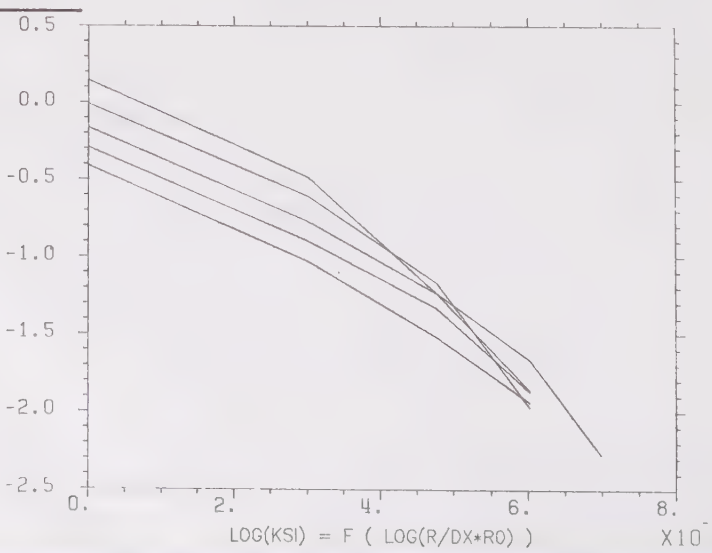


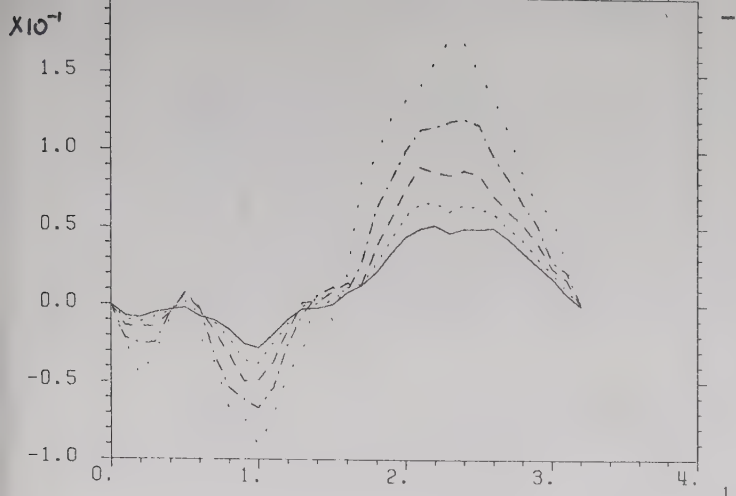




Page 6



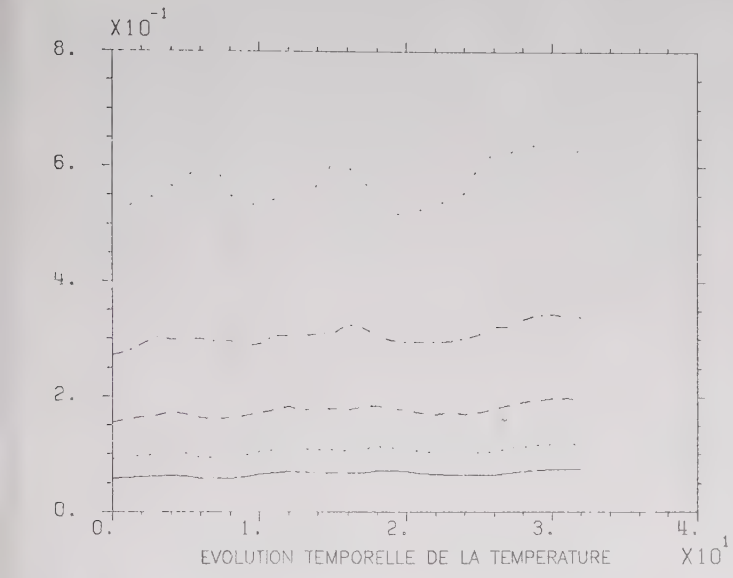


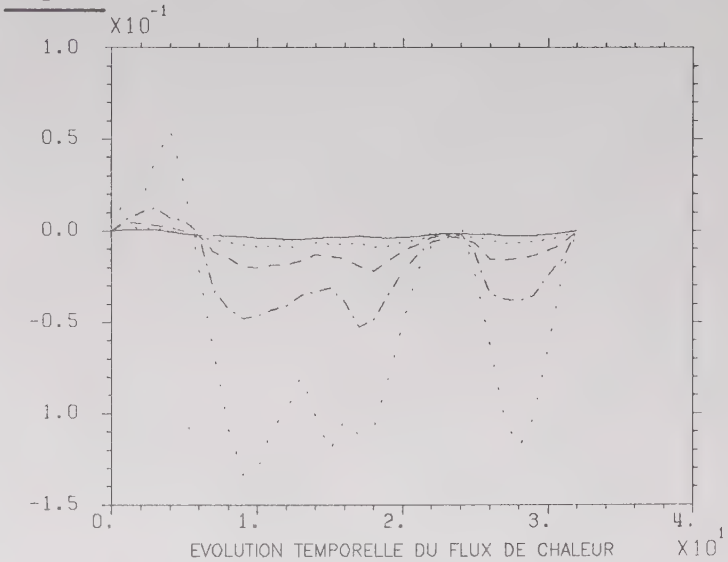


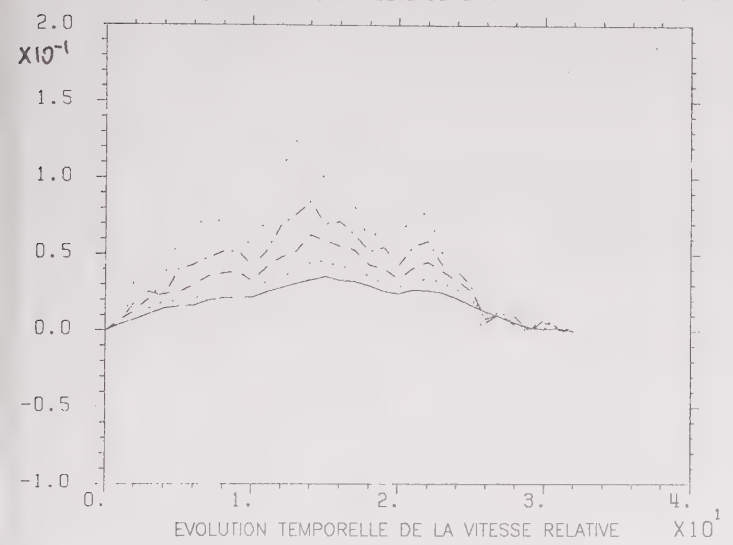
RESUME DES ANALYSE DISTANCE-VITESSE
PARRALLELE CORRESPONDANT A

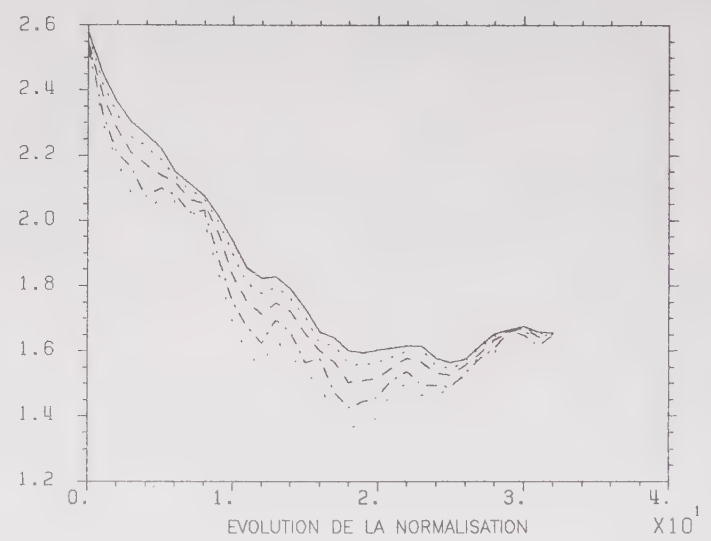
AEXP = 28.291
AEXP = 34.062
AEXP = 41.797
AEXP = 52.501
AEXP = 67.911

Page 7

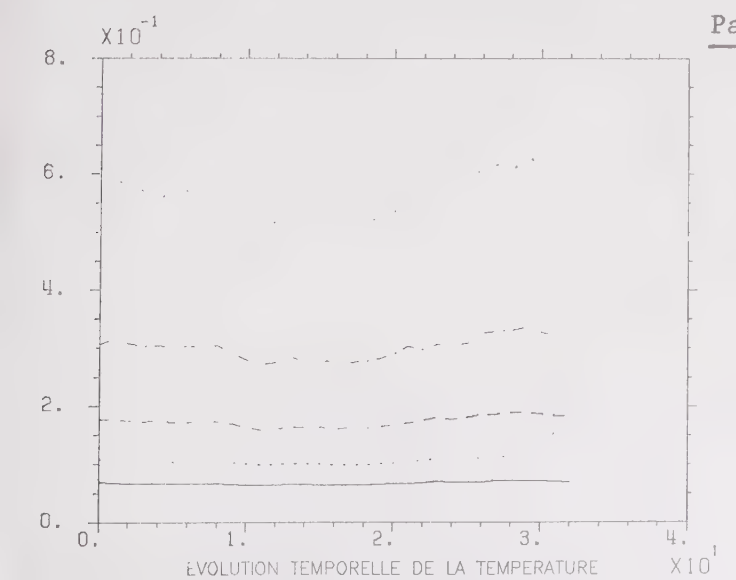


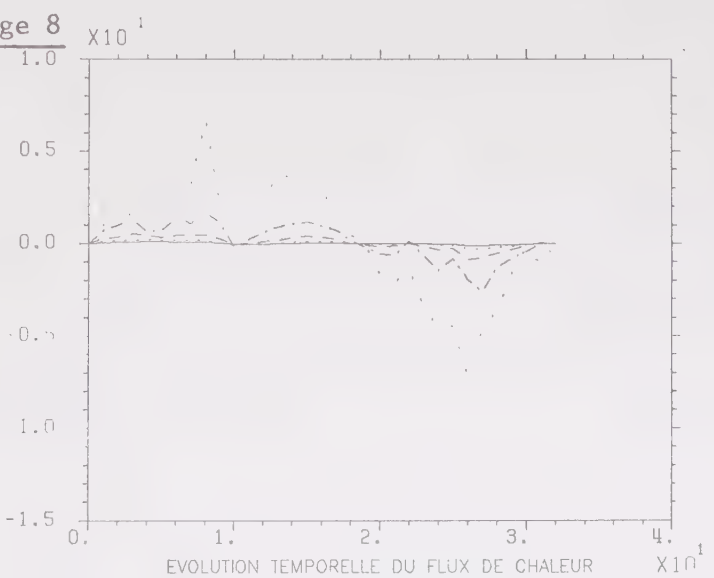






Page 8



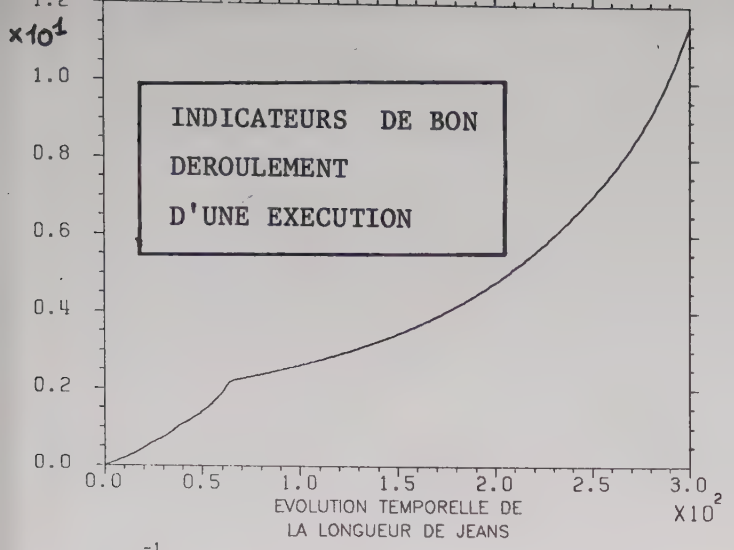


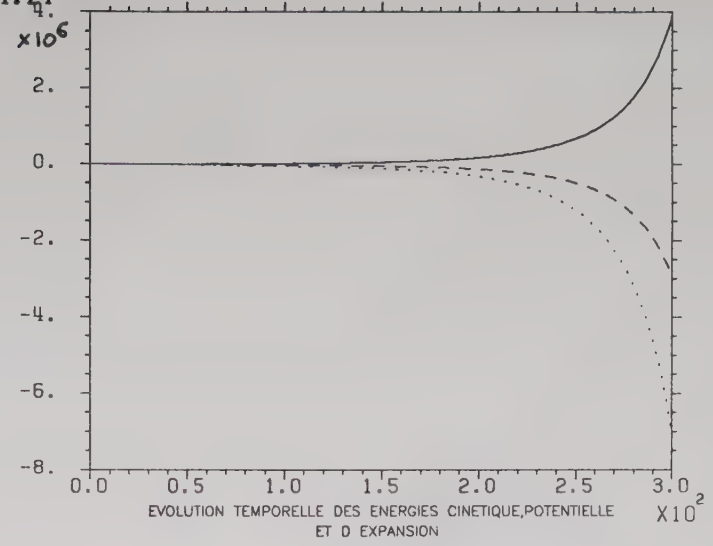
Pages 7-8 : Ces pages résument l'évolution des moments de vitesse de respectivement et sont générées par les sous-programmes RESUPA et RESUOR

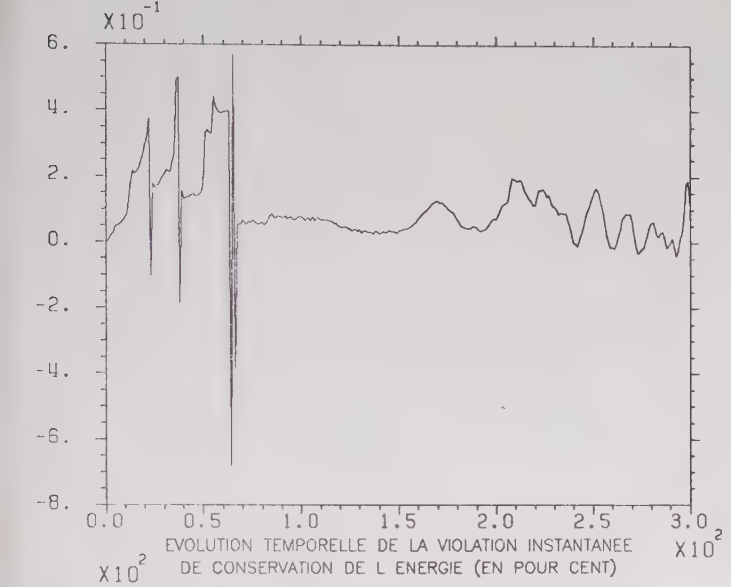
L'ensemble des diagnostics de ce programme, bien que permettant déjà une analyse très détaillée des résultats, ne constitue en aucune façon une structure figée. Il est clair, par exemple, qu'il sera facile d'y intégrer l'analyse des corrélations spatiales à 3 points ξ qui peut aussi s'obtenir par analyse de Fourier. Il suffit pour cela de prendre la transformation de Fourier inverse du "bispectre" de puissance $\langle \delta_{k_1} \delta_{k_2} \delta_{-(k_1+k_2)} \rangle$
Une extension moins directe, mais extrêmement importante du point de vue théorique, concerne la fonction de corrélation à *deux* temps :

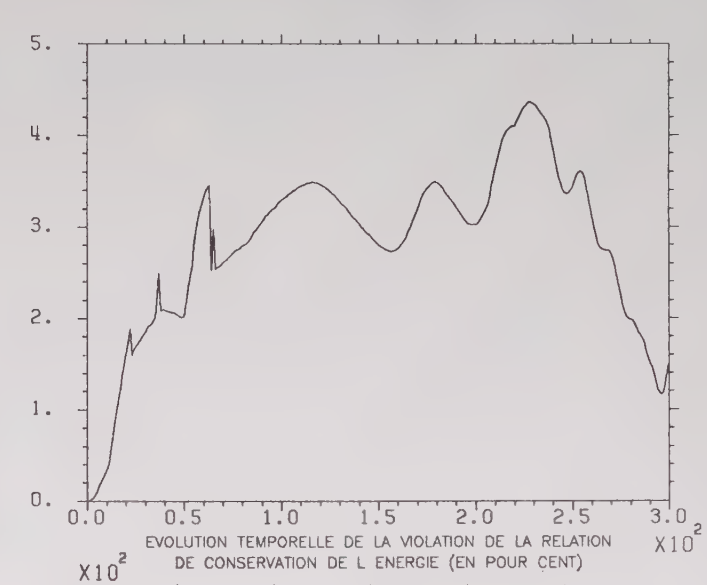
$$\xi(r, \Delta\theta) = \langle \delta\rho(r_0, \theta)\, \delta\rho(r_0+r, \theta+\Delta\theta) \rangle$$

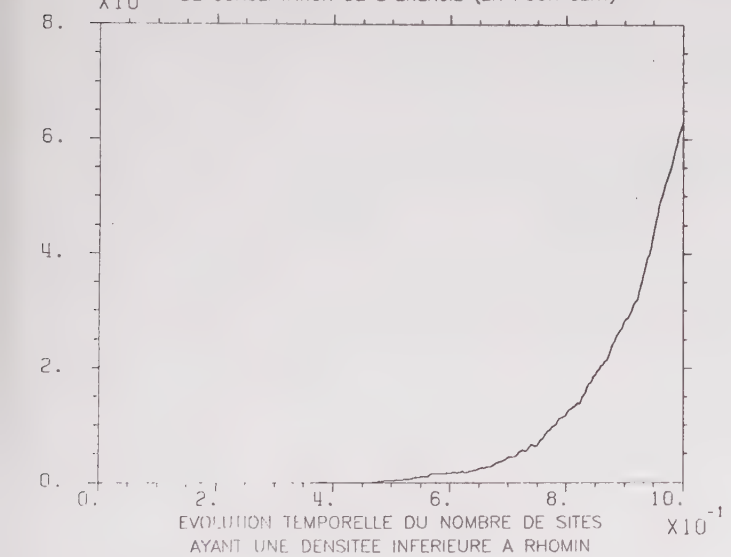
qui est comme nous l'avons vu indispensable à tout progrés théorique.
Enfin, on trouvera page suivante un exemple de tracé des indications de bon déroulement d'une exécution cités en IV-2.

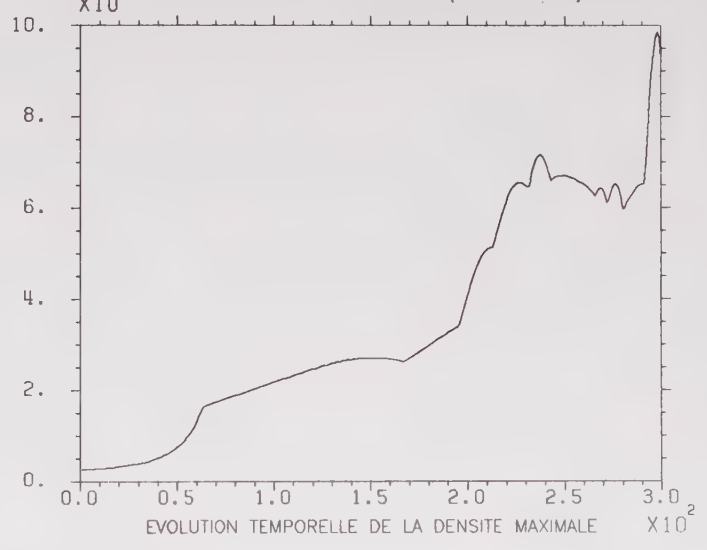

INDICATEURS DE BON
DEROULEMENT
D'UNE EXECUTION
EVOLUTION TEMPORELLE DE
LA LONGUEUR DE JEANS

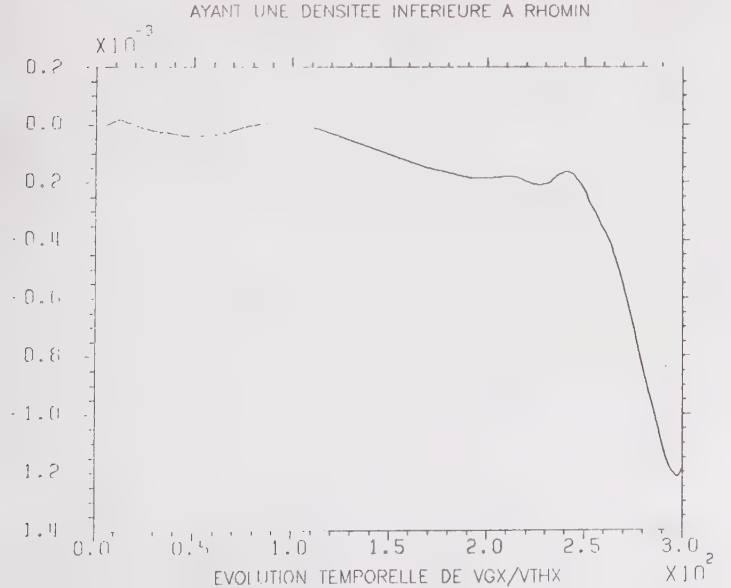

EVOLUTION TEMPORELLE DES ENERGIES CINETIQUE,POTENTIELLE
ET D EXPANSION

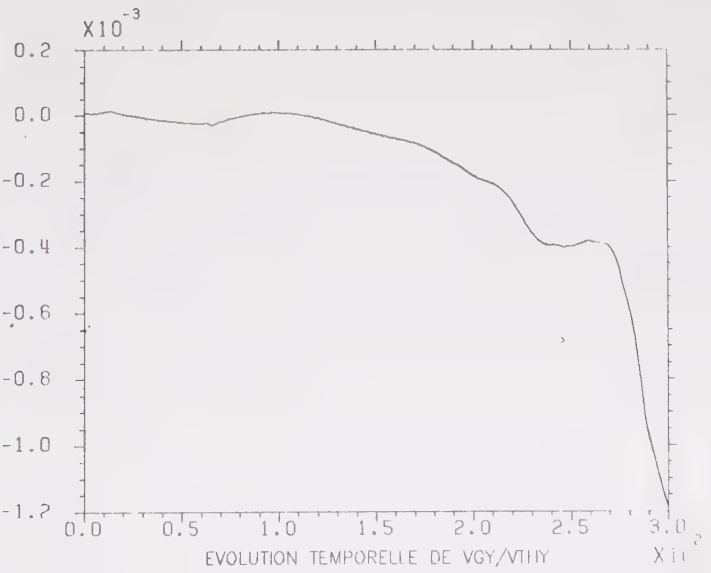

EVOLUTION TEMPORELLE DE LA VIOLATION INSTANTANEE
DE CONSERVATION DE L ENERGIE (EN POUR CENT)


EVOLUTION TEMPORELLE DE LA VIOLATION DE LA RELATION
DE CONSERVATION DE L ENERGIE (EN POUR CENT)


EVOLUTION TEMPORELLE DU NOMBRE DE SITES
AYANT UNE DENSITEE INFERIEURE A RHOMIN


EVOLUTION TEMPORELLE DE LA DENSITE MAXIMALE


EVOLUTION TEMPORELLE DE VGX/VTHX


EVOLUTION TEMPORELLE DE VGY/VTHY

A N N E X E VII

THEOREME D'ENERGIE COSMIQUE

La première opération de la hiérarchie (chapitre II) s'écrit :

$$\partial_\theta \rho_1 + Gam \int d\mu_2 \frac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \partial_{u_1}^k \rho_{12} = 0$$

La multiplication par $\frac{u_1^2}{na^3}$, suivie de l'intégration sur les vitesses permet d'écrire le premier moment non trivial :

$$\partial_\theta \langle u_1^2 \rangle + \frac{Gam}{na^3} \int d^3x_2 d^3u_1 d^3u_2 \frac{x_{21}^k}{x_{21}^3} u_1^2 \partial_{u_1}^k \rho_{12} = 0$$

Une première intégration par partie donne :

$$\partial_\theta \langle u_1^2 \rangle = \frac{2Gam}{na^3} \int d^3x_2 \frac{x_{21}^k}{x_{21}^3} \int d^6u \, u_1^k \rho_{12}$$

$$\partial_\theta \langle u_1^2 \rangle = \frac{2Gam}{na^3} \int d^3x_2 \partial_{x_{21}^k} \left(\frac{1}{x_{21}} \right) \int d^6u \, u_1^k \rho_{12}$$

Une seconde intégration par partie permet d'écrire :

$$\partial_\theta \langle u_1^2 \rangle = \frac{2Gam}{na^3} \int \frac{d^3x_2}{x_{21}} \partial_{x_{21}^k} \int d^6u \, u_1^k \rho_{12} = \frac{Gam}{na^3} \int \frac{d^3x_2}{x_{21}} \partial_{x_{21}^k} \int d^6u \, u_{12}^k \rho_{12}$$

Utilisant alors le premier moment de la seconde équation de la hiérarchie (chapitre II) qui s'écrit :

$$\partial_\theta n_{12} + \partial_{x_{12}^k} \int d^6u \, u_{12}^k \rho_{12} = 0$$

On a alors

$$\partial_\theta \langle u_1^2 \rangle = \frac{G a m}{\bar{n} a^3} \int \frac{d^3x}{x} \partial_\theta n = a \, (G m \bar{n} a^3) \partial_\theta \int \frac{d^3x}{x} \psi$$

REFERENCES

[1] Bisnovatyi-Kogan G.S., Zeldovich Ya. B., (1970), Astron. Zh. 47,942.

[2] Bouchet F.R., Pellat R. , (1982), II Moriond Astrophysics Meeting. Proc.

[3] Buneman, (1969), A compact non-iterative, Poisson Solver, SUIPR Report N° 294, Stanford University.

[4] Ceccarelli C., Dall'Oglio G., Bernardis P. de, Massi S., Melchiorri B., Melchiorri F., Moreno G., Pietranera L., (1982), II Moriond Astrophysics Meeting Proc.

[5] Chincarini G., Rood H.J., (1976), ApJ 206,30.

[6] Davis M., Geller M.J., Huchra J., (1978), ApJ 208,13.

[7] Davis M., Peebles P.J.E., (1977), ApJ Suppl. 34,425.

[8] Dmitriev N.A., Zeldovich Ya.B., (1964), Sov. Phys. JETP 18,793.

[9] Doroshkevich A.G., Shandarin S.F., (1973), Astrofizica 9,549.

[10] Doroshkevich A.G., Ryabenki V.S., Shandarin S.F., (1973), Astrofizica 9,257.

[11] Doroshkevich A.G., Shandarin S.F., Saar E., (1978), M.N. 184,643.

[12] Doroshkevich A.G., Kotok E.V., Novikov I.D., (1980), Polyudov A.N., Shandarin S.F., Sigov Yu.S., M.N., 192,321.

[13] Eastwood J.W., (1975), J. Comput. Phys. Vol 18, p. 1-20.

[14] Eastwood J.W., Hockney R.W., Lawrence D.N., (1980), Comput. Phys. Commun., Vol 19, p. 215-261.

[15] Efstathiou G., Ellis R.S., Fong R., Shanks T., (1982), (Preprint).

[16] Fall S.M., Severne G., (1976), M.N., 174,241.

[17] Fall S.M., (1979), Rev. Mod. Phys. 51,1.

[18] Fall S.M., Saslaw W.C., (1976), AsJ 204,63.

[19] Fall S.M., Tremaine S., (1977), ApJ 216,682.

[20] Felten, (1977), AsJ 82,861.

[21] Fixsen D.J., Cheng E.S., Wilkinson D.T., (1983), Phys. Rev. Lett. 50,8, p. 620.

[22] Fry J.N., Peebles P.J.E., (1978), ApJ 221,19.

[23] Groth E.J., Peebles P.J.E., (1975), A.A 41,143.

[24] Groth E.J., (1977), ApJ 217,385.

[25] Groth E.J., (1980), IAU Symp. : Objects at high redshifts p. 31-38.

[26] Hauser M.G., Peebles P.J.E., (1973), ApJ 185,757.

[27] Hockney R.W., (1965),"A fast Direct Solution of Poisson's equation using Fourier Analysis," J. Assoc. Comput. Math. Vol 12 p. 95-113.

[28] Hockney R.W., (1970), "The potential calculation and some application". Methods of Comput. Phys. Vol 9 p. 135-211.

[29] Hockney R.W., Eastwood J.W., (1981), "Computer Simulations Using particles". Mc Graw Hill Inc.

[30] Inagaki S., (1976), Publ. Astron. Soc. Japan. 28,77.

[31] Irvine W.M., (1965), Ann. Phys. 32,322.

[32] Jones B.J.T., (1976), Rev. Mod. Phys. 48,1.

[33] Kiang T., Saslaw W.C., (1969), M.N. 143,129.

[34] Kirshner., Oemler G., Schechter P., (1979), AsJ 84,951.

[35] Klypin,Shandarin,(Preprint 82).

[36] Layzer, (1963), ApJ 138,174.

[37] Layzer D., (1975), Galaxies and the Universe IX, 665 Ed. Sandage, Sandage et Kristian, Univ. of Chicago.

[38] Lewis, (1970), Methods of Comput. Phys. 9, p. 307-338.

[39] Lewis, (1970), J. Comput. Phys. 6, p. 136-141.

[40] Lifshitz E.M., (1946), J. Phys. 10,116.

[41] Limber D.N., (1953), ApJ 117,134.

[42] Limber D.N., (1954), ApJ 119,655.

[43] Lubin P.M., Epstein G.L., Smoot G., (1983), Phys. Rev. Lett. 50,8 p. 616.

[44] Mandelbrot B., (1975), "Les objets fractals" Flammarion.

[45] McClelland J., Silk J., (1976), (a), ApJ 216,665-681. (1976), (b), ApJ 217,331-352. (1977), ApJ Suppl. Ser. 36,389-404.

[46] Melott A.L., (1982), (a), Phys. Rev. Letters 48,894. (1982), (b), ApJ (1982), (c), Nature 296,721.

[47] Neyman J., (1962), Problems of Extragalactic Research. ed. G.C. Mc. Vittie, p. 294.

[48] Neyman J., Scott E.L., Shane C.D., (1954), ApJ Suppl. 1,269.

[49] Norman C.A., Silk J., (1976), AsJ 224,293.

[50] Parry W.E., (1977), Physics Letters 60 A, 265.

[51] Peebles, (1976), Ap. Space Sci. 45,3.

[52] Peebles P.J.E., (1979), AsJ 84,730.

[53] Peebles P.J.E., (1980), "Large Scale Structure of the Universe", Princeton University Press.

[54] Peebles P.J.E., (1981), Proc. of 10th Texas Symp. on Relativistic Astrophysics, Ann. N.Y. Acad. Sci. 375,157.

[55] Peebles P.J.E., Hauser M.G., (1974), ApJ Suppl. 28,19.

[56] Penzias A.A., Wilson R.W., (1965), ApJ 142,419.

[57] Phillips S., Fong R., Ellis R.S., Fall S.M., Mac Gillivray H.T. (1978) M.N. 182,673.

[58] Potter D., (1973), "An introduction to Computational Physics", John Wiley et Sons Ltd London.

[59] Rivolo, Yahil A., (1981), ApJ 251,477.

[60] Saslaw W.C., (1972), ApJ 177,17.

[61] Schwartz D.A., Murray S.S., Gurky H., ApJ 204,315.

[62] Scott E.L., (1962), "Problems of Extragalactic Research", Ed. G.C. Mc Vittie p. 269.

[63] Seldner M., Peebles P.J.E., (1977), ApJ 215,703.

[64] Schaeffer R., Silk J., Preprint 1983.

[65] Sandage A., Tamman G.A., (1982), Cosmology and Fundamental Astrophysics, Scripta Varis 48.

[66] Shandarin S.F., (1980), Astrofizika, Vol 16 N° 4, p. 769.

[67] Shanks T., Fong R., Ellis R.S., Mac Gillivray H.T., M.N., (1980).

[68] Soneira R.M., Peebles P.J.E., (1977), ApJ 211,1.

[69] Totsuji H., Kihara T., (1969), Publ. Astr. Soc. Japan. 21,221.

[70] Van Albada G.B., (1960), Bull. Astr. Soc. Netherlands 15,165.

[71] Webster A., (1976), M.N. 175,61.

[72] White S.D.M., (1979), M.N. 177,717.

[73] Wilkinson D.T., (1982), II Moriond Astrophysics Meeting Proc.

[74] Yahil A., AsJ Lett., 204, L59.

[75] Zeldovich Ya.B., (1970), A.A. 5,84.

[76] Zeldovich Ya.B., (1978), IAU Symp. 79, p. 409.